Analisi Matematica I

14 febbraio 2005

Esercizio 1

Determinare i valori a e b per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \\ \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x = 0$ e calcolare la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa $x = 0$.

Soluzione:

$\boxed{a = b = 1. \text{ Equazione della retta tangente } r(x) = 1 + x}$

Calcoli:
Si trata di determinare a e b in modo tale che f sia continua in $x = 0$ e che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$.
Siccome $f(0) = e^0 = 1$ per avere continuità deve essere $\frac{a\,0+b}{0^2+1} = b = 1$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = a$$

cioè per essere derivabile deve essere $a = 1$.
L'equazione della retta tangente in $x = 0$ è

$$r(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + x.$$

Esercizio 2

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = (x-1)\log(x)$$

nell'intervallo (0,2].

Soluzione:

$\boxed{x = 1 \text{ punto di minimo assoluto. } x = 2 \text{ punto di massimo locale.}}$

Calcoli:
Osserviamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ pertanto no ci sará un massimo assoluto.

$$f'(x) = \log(x) + \frac{x-1}{x}$$

$f'(1) = 0$.
Se $0 < x < 1$ allora $\log(x) < 0$ e anche $(x-1)/x < 0$ pertanto $f'(x) < 0$ se $x \in (0,1)$.
Se $1 < x \leq 2$ allora $\log(x) > 0$ e anche $(x-1)/x > 0$ pertanto $f'(x) > 0$ se $x \in (1,2]$.
Cioè f è decrescente in $(0,1)$ e crescente in $(1,2]$. Da questo si deduce che $x = 1$ è un punto di minimo assoluto e $x = 2$ un punto di massimo locale.

Esercizio 3

Si stabiliscano i valori di $\alpha > 0$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos n}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2})}$$

è convergente.

Soluzione:

$\boxed{\alpha > 3}$

Calcoli:
Siccome $2 \leq 3+\cos n \leq 4$ e $n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2}) > 0$ per ogni $n \geq 1$ risulta

$$2\frac{1}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2})} \leq \frac{3+\cos n}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2})} \leq 4\frac{1}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2})},$$

da dove si vede che la serie si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(1+\frac{1}{n^2})}$$

Usando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

e il criterio del confronto asintotico, si ha che questa si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}}$$

che è convergente se e solo se $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{xy} \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2x^2 - 1}}$$

Calcoli:
Si tratta di un'equazione a variabili separabili:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{xy},$$
$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x},$$
$$\frac{2y\,dy}{y^2+1} = \frac{2dx}{x}.$$

Integrando

$$\log(y^2+1) = 2\log(|x|) + c = \log x^2 + c.$$

Cioè, prendendo esponenziali

$$y^2 + 1 = x^2\, e^c = C\, x^2,$$
$$y = \sqrt{Cx^2 - 1}.$$

Per determinare C usiamo la condizione iniziale:

$$y(1) = \sqrt{C-1} = 1 \Rightarrow C = 2.$$

La soluzione è

$$y(x) = \sqrt{2x^2-1}.$$