COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Firma dello studente ______

Analisi Matematica I

17 gennaio 2005

Esercizio 1

Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-x}{x\sin(2x)}\,.$$

Soluzione:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-x}{x\sin(2x)} = -1/4}$$

Calcoli:
Usando gli sviluppi di MaClaurin

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin(2x) = 2x + o(x)$$

si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-x}{x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2/2 + o(x^2) - x}{x(2x+o(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{2x^2+o(x^2)} = -1/4\,.$$

Esercizio 2

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{xe^x}{x+5}$$

nell'intervallo (-5,5].

Soluzione:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} \text{ punto di massimo relativo.} \\ x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} \text{ punto di minimo relativo.} \\ x_3 = 5 \text{ punto di massimo assoluto.} \end{array}}$$

Calcoli:

Siccome $\lim_{x \to -5^+} \dfrac{xe^x}{x+5} = -\infty$ non ci sarà un punto di minimo assoluto.

Calcoliamo $f'(x)$ per studiare gli estremi all'interno del intervallo.

$$f'(x) = \frac{(1+x)e^x(x+5) - xe^x}{(x+5)^2} = \frac{e^x(x^2+5x+5)}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0, \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nell'intervallo $(-5, \frac{-5-\sqrt{5}}{2})$ si ha $x^2 + 5x + 5 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è crescente.

Nell'intervallo $(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2})$ si ha $x^2 + 5x + 5 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ è decrescente.

Nell'intervallo $(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, 5]$ si ha $x^2 + 5x + 5 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è crescente.

Pertanto $x_1 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo e $x_2 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo. Anche $x_3 = 5$ è un punto di massimo relativo.

Siccome $f(5) = e^5/2 > 0$ e $f(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}) = \frac{(-5-\sqrt{5})e^{(-5-\sqrt{5})/2}}{5-\sqrt{5}} < 0$, $x_3 = 5$ è il punto di massimo assoluto.

Esercizio 3

Si stabiliscano i valori di $\alpha > 0$ per i quali l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

è convergente.

Soluzione:

$\boxed{\alpha < 3}$

Calcoli:

Siccome $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ risulta

$$\frac{1-\cos x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{2x^{\alpha-2}}\ .$$

Usando il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$ è convergente se e solo se $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x^{\alpha-2}}\,dx$ è convergente, cioè, se e solo se $\alpha - 2 < 1$. $\alpha < 3$.

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\Big(\frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\Big) + \frac{1}{5}e^x\,.}$$

Calcoli:
Cominciamo per trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea $z'' + 2z' + 2z = 0$

$$s^2 + 2s + 2 = 0, \quad s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$z(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)\ .$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(x) = Ce^x\ .$$

Siccome $\overline{y}''(x) = \overline{y}'(x) = \overline{y}(x)$, $\overline{y}(x)$ è soluzione se $Ce^x + 2Ce^x + 2Ce^x = e^x$ cioè se $5C = 1$, $C = 1/5$.

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{5}e^x$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = z(x) + \overline{y}(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{5}e^x\ .$$

Per calcolare la soluzione del problema di Cauchy si determinano A e B in modo che sia $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$.

$$y(0) = A + 1/5 = 1, \quad A = 4/5\ .$$

Calcoliamo la derivata: $y'(x) = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) + \frac{1}{5}e^x$.

$$y'(0) = -A + B + 1/5 = -4/5 + B + 1/5 = B - 3/5 = -1, \quad B = -2/5\ .$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{-x}\Big(\frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x\Big) + \frac{1}{5}e^x\ .$$