COGNOME ____ NOME ____ Matr. ____

Firma dello studente ____

Analisi Matematica I

18 aprile 2005

Esercizio 1

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\sin(x+x^2)}$$

Soluzione:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\sin(x+x^2)} = 0}$$

Calcoli:

Si trata di un limite che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Usando il teorema di de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{\sin(x+x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x/\cos x}{(1+2x)\cos(x+x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{(1+2x)\cos(x+x^2)\cos x} = 0$$

Esercizio 2

Trovare e classificare i valori estremi locali e assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$$

nell'intervallo (-1,1).

Soluzione:

$$\boxed{-1+\sqrt{2} \text{ è il punto di massimo assoluto. Non ci sono altri estremi}}$$

Calcoli:

$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{e^{-x}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-x}}{x^2-1} = -\infty$ pertanto non ci sarà un minimo assoluto.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2-1) - 2xe^{-x}}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x^2+2x-1)e^{-x}}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$-1-\sqrt{2} \notin (-1,1)$ invece $-1+\sqrt{2} \in (-1,1)$ è un punto di estremo.
Nell'intervallo $(-1, -1+\sqrt{2})$ si ha $x^2+2x-1 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è crescente.
Nell'intervallo $(-1+\sqrt{2}, 1)$ si ha $x^2+2x-1 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ è decrescente.
Pertanto $-1+\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo e anche assoluto in (-1,1).

Esercizio 3

Calcolare

$$\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\,dx\,.$$

Soluzione:

$$\boxed{\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\,dx = \log\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C}$$

Calcoli:
Col cambiamento di variabile $x^2 = t$

$$\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t}{t^2+3t+2}\,dt$$

$t^2+3t+2 = (t+2)(t+1)$ quindi

$$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t+2)}{t^2+3t+2} = \frac{(A+B)t+A+2B}{t^2+3t+2}$$

$$\begin{array}{l} A+B=1 \\ A+2B=0 \end{array} \quad B=-1 \quad A=2$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\big[2\log|t+2|-\log|t+1|\big]+C \\
&= \frac{1}{2}\big[2\log(x^2+2)-\log(x^2+1)\big]+C \\
&= \log(x^2+2)-\log(\sqrt{x^2+1})+C \\
&= \log\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{y(x) = (3 + 2x)e^{-x} + x - 2}$$

Calcoli:
Cominciamo per trovare la soluzione generale dell'equazione omogenea $z'' + 2z' + z = 0$

$$s^2 + 2s + 1 = 0, \quad (s+1)^2 = 0, \quad s = -1 \text{ radice doppia}$$

$$z(x) = (A + Bx)e^{-x} \ .$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(x) = \alpha x + \beta \, .$$

Siccome $\overline{y}'(x) = \alpha$ e $\overline{y}''(x) = 0$, $\overline{y}(x)$ è soluzione se $0 + 2\alpha + \alpha x + \beta = x$ cioè se $\alpha = 1$ e $2\alpha + \beta = 0$, $\beta = -2$.

$$\overline{y}(x) = x - 2$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = z(x) + \overline{y}(x) = (A + Bx)e^{-x} + x - 2 \ .$$

Per calcolare la soluzione del problema di Cauchy si determinano A e B in modo che sia $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

$$y(0) = A - 2 = 1, \quad A = 3 \ .$$

Calcoliamo la derivata: $y'(x) = Be^{-x} - (A + Bx)e^{-x} + 1$.

$$y'(0) = B - A + 1 = 0, \quad B - 2 = 0, \quad B = 2 \ .$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (3 + 2x)e^{-x} + x - 2 \, .$$