COGNOME ____________ NOME ____________ Matr. ____________

Firma dello studente ______________________________ **A**

II Prova di Analisi Matematica I

20 dicembre 2004

Esercizio 1

Si disegni (qualitativamente) il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\, e^x$$

In particolare si studino il segno di f, gli asintoti e la crescenza/decrescenza.

Calcoli e disegno: Dominio: $D(f) = I\!R \setminus \{0\}$

Segno di f: $f(x) > 0$ per ogni $x \in D(f)$ perche la funzione esponenziale é posistiva per ogni x e la funzione x^2 é positiva per x diverso da 0.

Asintoti: La funzione f ha un asintoto verticale in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\, e^x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\, e^x = +\infty$$

(il numeratore tende a uno, il denominatore a zero).

$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2}\, e^x = 0$ (il numeratore tende a zero il denominatore a $+\infty$), pertanto f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}\, e^x = +\infty$ (il numeratore tende a $+\infty$ piu velocemente del denominatore). Vediamo se f ha un asintoto obliquo: $\lim_{x\to +\infty} \frac{f}{x} = +\infty$ pertanto non ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ perche questo limiti dovrebbe essere finito.

Crescenza/decrescenza: $f'(x) = \dfrac{e^x\, x^2 - 2xe^x}{x^4} = \dfrac{x-2}{x^3} e^x$.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0 & f \text{ crescente} \\ < 0 & \text{se } 0 < x < 2 & f \text{ decrescente} \\ = 0 & \text{se } x = 2 & \text{punto di minimo relativo} \\ > 0 & \text{se } x > 2 & f \text{ crescente} \end{cases}$$

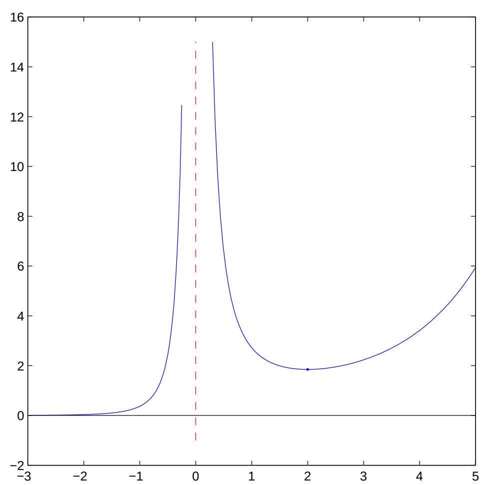

Figure 1: $f(x)$

Esercizio 2

Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx$$

Risultato: $\boxed{e - \text{arctg}\, e - 1 + \frac{\pi}{4}}$

Calcoli:
Col cambiamento di variabile $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^e \frac{t^3}{(t^2+1)t}\,dt = \int_1^e \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \text{arctg}\, t\Big|_1^e$$

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = (e - \text{arctg}\, e) - (1 - \frac{\pi}{4})$$

Esercizio 3

Si stabiliscano i valori di $x > 0$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n\, x^n}{(n^3+1)\, 2^n}$$

è convergente.

Soluzione: $\boxed{0 < x \leq 2}$

Calcoli:

Applico il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)\, x^{n+1}}{[(n+1)^3+1]\, 2^{n+1}} \frac{(n^3+1)\, 2^n}{3n\, x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{3n} \frac{(n^3+1)}{[(n+1)^3+1]} \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Se $\frac{x}{2} < 1$ la serie converge.

Se $\frac{x}{2} > 1$ la serie diverge.

Se $\frac{x}{2} = 1$, $x = 2$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{(n^3+1)}$ che è asintotica a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ per tanto convergente.

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 6x + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = -e^{3x} + e^{2x} + x + 1}$

Calcoli:
Equazione omogenea: $z'' - 5z' + 6z = 0$

$$s^2 - 5s + 6 = 0, \quad s = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}, \quad s_1 = 3, \;\; s_2 = 2$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea: $z(x) = Ae^{3x} + Be^{2x}$.
Soluzione particolare: $\widetilde{y}(x) = ax + b$. $(\widetilde{y}'(x) = a, \widetilde{y}''(x) = 0)$.

$$-5a + 6(ax + b) = 6x + 1, \quad 6ax + (6b - 5a) = 6x + 1,$$

$$a = 1, \; b = \frac{1 + 5a}{6} = 1$$

$\widetilde{y}(x) = x + 1$.
$y(x) = Ae^{3x} + Be^{2x} + x + 1, \quad y'(x) = 3Ae^{3x} + 2Be^{2x} + 1$.
$y(0) = A + B + 1 = 1, \quad A + B = 0, \quad B = -A$.
$y'(0) = 3A + 2B + 1 = 0, \quad A + 1 = 0, \quad A = -1, \quad B = 1$.

$$y(x) = -e^{3x} + e^{2x} + x + 1.$$

COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Firma dello studente ______ **B**

II Prova di Analisi Matematica I

20 dicembre 2004

Esercizio 1

Si disegni (qualitativamente) il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-3}\, e^{-x}$$

In particolare si studino il segno di f, gli asintoti e la crescenza/decrescenza.

Calcoli e disegno: Dominio: $D(f) = I\!R \setminus \{3\}$

Segno di f: $f(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 3 \\ > 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ (la funzione e^{-x} é posistiva per ogni x).

Asintoti: La funzione f ha un asintoto verticale in $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3}\, e^{-x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}\, e^{-x} = +\infty$$

(il numeratore tende a uno, il denominatore a zero).

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3}\, e^{-x} = 0$ (il numeratore tende a zero il denominatore a ∞), pertanto f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3}\, e^{-x} = -\infty$ (il numeratore tende a ∞ piu velocemente del denominatore). Vediamo se f ha un asintoto obliquo: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f}{x} = \infty$ pertanto non ha un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ perche questo limiti dovrebbe essere finito.

Crescenza/decrescenza: $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}\,(x-3) - e^{-x}}{(x-3)^2} = \dfrac{2-x}{x^2} e^{-x}$.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 2 & f \text{ crescente} \\ = 0 & \text{se } x = 2 & \text{punto di masimo relativo} \\ < 0 & \text{se } x > 2 & f \text{ decrescente} \end{cases}$$

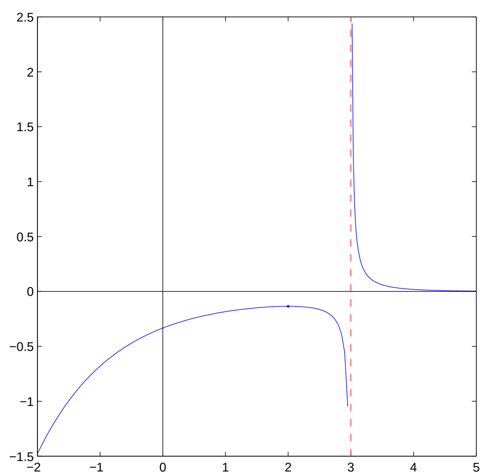

Figure 2: $f(x)$

Esercizio 2

Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}\,dx$$

Risultato: $\boxed{\frac{1}{2}\Big[1+\log\Big(\frac{3}{e+2}\Big)\Big]}$

Calcoli:
Col cambiamento di variabile $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{(t+2)t}\,dt = \int_1^e \big(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t}\big)\,dt = \int_1^e \frac{At+B(t+2)}{(t+2)t}\,dt$$

$2B = 1$, $B = 1/2$.
$A + B = 0$, $A = -B = -1/2$.

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\big)\,dt = \frac{1}{2}\big(\log|t| - \log|t+2|\big)\Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{2}[(1-\log(e+2)) - (0-\log(3))] = \frac{1}{2}[1+\log(3)-\log(e+2)]$$

Esercizio 3

Si stabiliscano i valori di $x > 0$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, x^n}{(n^2+2)\, 3^n}$$

è convergente

Soluzione: $\boxed{0 < x < 3}$

Calcoli:

Applico il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, x^{n+1}}{[(n+1)^2+2]\, 3^{n+1}} \frac{(n^2+2)\, 3^n}{n\, x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{(n^2+2)}{[(n+1)^2+2]} \frac{x}{3} = \frac{x}{3}$$

Se $\dfrac{x}{3} < 1$ la serie converge.

Se $\dfrac{x}{3} > 1$ la serie diverge.

Se $\dfrac{x}{3} = 1$, $x = 3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n^2+2)}$ che è asintotica a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ per tanto divergente.

Esercizio 4

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 12x - 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = -\frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{2x} - 2x}$

Calcoli:

Equazione omogenea: $z'' + z' - 6z = 0$

$$s^2 + s - 6 = 0, \quad s = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}, \quad s_1 = -3, \ \ s_2 = 2$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea $z(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}$.

Soluzione particolare $\widetilde{y}(x) = ax + b$. ($\widetilde{y}'(x) = a, \widetilde{y}''(x) = 0$) .

$$a - 6(ax + b) = 12x - 2, \quad -6ax + (a - 6b) = 12x - 2,$$

$$a = -2, \ b = \frac{a+2}{6} = 0$$

$\widetilde{y}(x) = -2x$.

$y(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x} - 2x, \ \ y'(x) = -3Ae^{-3x} + 2Be^{2x} - 2.$

$y(0) = A + B = 0, \ \ A = -B.$

$y'(0) = -3A + 2B - 2 = 1, \ \ 5B = 3, \ \ B = 3/5, \ \ A = -3/5.$

$$y(x) = -\frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{2x} - 2x.$$