ANALISI NUMERICA 14 febbraio 2005

1. Studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel per le seguenti matrici

i) $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Questa matrice ha la proprietà di dominanza diagonale stretta per righe:

prima righa	$\lvert -5\rvert > 2+1+\lvert -1\rvert$
seconda righa	$3 > 1+1+0$
terza righa	$\lvert -4\rvert > \lvert -1\rvert + 0 + 2$
quarta righa	$3 > 0+1+\lvert -1\rvert.$

Pertanto sia Jacobi che Gauss-Seidel convergono.

ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Questa matrice ha uno zero sulla diagonale pertanto nessuno dei due metodi (Jacobi e Gauss-Seidel) è definito.

iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Questa matrice è simmetrica. Vediamo se è definita positiva:

$$6 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 4 - 12 = 2 > 0$$

Tutte le sottomatrici principali hanno determinante positivo pertanto la matrice è simmetrica definita positiva e il metodo di Gauss-Seidel convege.

Per studiare la convergenza del metodo di Jacobi dobbiamo studiare il raggi spettrale della matrice d'iterazione

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2/3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda + \frac{2}{3}\lambda = \lambda(8/9 - \lambda^2)$$

Gli autovalori della matrice d'iterazione sono 0, $\sqrt{8/9}$ e $-\sqrt{8/9}$. Il raggio spettrale della matrice d'iterazione del metodo di Jacobi è $\sqrt{8/9} < 1$ pertanto il metodo di Jacobi è convergente.

2. Data la equazione

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

i) Dimostrare che ha soluzione nell'intervallo $(0, 1)$.

La funzione $f(x) = x^3+3x-2$ è una funzione continua (è un polinomio) e $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2 > 0$. È una funzione continua che cambia segno nell'intervallo $(0, 1)$ pertanto esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $f(\alpha) = 0$.
Siccome $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ la funzione f è monotona crescente e la radice α è unica.

ii) Usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.25.

La prima approssimazione della radice α che possiamo considerare è il punto medio dell'intervallo $(0, 1)$. $C_0 = 1/2$. Possiamo anche dare una stima dell'errore $|\alpha - C_0| < (1 - 0)/2 = 0.5 > 0.25$.
Siccome $f(1/2) = 1/8 + 3/2 - 2 < 0$ sapiamo che α si trova nell'intervallo $(1/2, 1)$. Pertanto adesso possiamo considerare come approssimazione della radice il punto medio di questo nuovo intervallo $C_1 = 3/4$ con la seguente stima dell'errore: $|\alpha - C_1| < (1 - 1/2)/2 = 0.25$.

iii) Usando il metodo di Newton e tomando come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-3}.

Metodo di Newton:

$$x_0 \text{ assegnato}$$

$$x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|\alpha - x_n| \approx |x_n - x_{n+1}|$$

Ci chiedono di partire da $x_0 = 3/4$, iterare nel seguente modo

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^3 + 3x_n - 2)/(3x_n^2 + 3)$$

e fermarci quando $|x_{n+1} - x_n| = |(x_n^3 + 3x_n - 2)/(3x_n^2 + 3)| < 10^{-3}$

$x_0 = 3/4$

$x_1 = 3/4 - \frac{(3/4)^3+3\cdot 3/4-2}{3\cdot(3/4)^2+3} = 3/4 - 0.143333 = 0.606667$

$|x_1 - x_0| = 0.143333 > 10^{-3}$

$x_2 = 0.606667 - \frac{0.606667^3+3\cdot 0.606667-2}{3\cdot 0.606667^2+3} = 0.606667 - 0.010546 = 0.596121$

$|x_2 - x_1| = 0.010546 > 10^{-3}$

$x_3 = 0.596121 - \frac{0.596121^3+3\cdot 0.596121-2}{3\cdot 0.596121^2+3} = 0.596121 - 0.000049 = \mathbf{0.596072}$

$\mathbf{|x_3 - x_2| = 0.000049 < 10^{-3}}$

3. Calcolare

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3+2}\,dx$$

usando il metodo di Cavalieri-Simpson con 2 sottointervalli. Dare una stima dell'errore.

Usando un solo intervallo

$$I_1 = \frac{2-0}{6}[f(0)+4f(1)+f(2)] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+4\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right) = 0.644444.$$

Usando due sottointervalli

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1-0}{6}[f(0)+4f(1/2)+f(1)] + \tfrac{2-1}{6}[f(1)+4f(3/2)+f(2)] \\ &= \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}+4\tfrac{8}{17}+\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{3}+4\tfrac{8}{43}+\tfrac{1}{10}\right) \\ &= 0.452614 + 0.196253 = \mathbf{0.648867}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'errore

$$E_2 = \left| \int_0^2 \frac{1}{x^3+2}\,dx - I_2 \right| \approx \frac{1}{15}|I_2 - I_1| = \frac{0.004423}{15} = \mathbf{0.000295}.$$