ANALISI NUMERICA 17 gennaio 2005

Tema A

1. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siccome la matrice è tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Pertanto, moltiplicando le due matrici a destra e tenendo conto della uguaglianza risulta essere

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 3 \\ &\beta_2\alpha_1 = 6 && \rightsquigarrow && \beta_2 = \tfrac{6}{\alpha_1} = \tfrac{6}{3} = 2 \\ &2\beta_2 + \alpha_2 = 5 && \rightsquigarrow && \alpha_2 = 5 - 2\beta_2 = 5 - 4 = 1 \\ &\beta_3\alpha_2 = -1 && \rightsquigarrow && \beta_3 = \tfrac{-1}{\alpha_2} = \tfrac{-1}{1} = -1 \\ &2\beta_3 + \alpha_3 = 0 && \rightsquigarrow && \alpha_3 = -2\beta_3 = 2 \\ &\beta_4\alpha_3 = 2 && \rightsquigarrow && \beta_4 = \tfrac{2}{\alpha_3} = 1 \\ &\beta_4 + \alpha_4 = -1 && \rightsquigarrow && \alpha_4 = -1 - \beta_4 = -2 \end{aligned}$$

Cioè

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Usando il metodo di Newton approssimare $\sqrt[3]{2}$ con errore stimato minore di 10^{-2}.

Per usare Newton doviamo scrivere il problema nella forma "trovare α tale che $f(\alpha) = 0$" per una certa funzione f.

$$\sqrt[3]{2} = \alpha \qquad 2 = \alpha^3 \qquad \alpha^3 - 2 = 0$$

Pertanto si cerca α tale che $f(\alpha) = 0$ dove la funzione f è $f(x) = x^3 - 2$. f è un polinomio, pertanto una funzione continua. $f(1) = 1 - 2 < 0$ mentre che $f(2) = 8 - 2 > 0$ pertanto sapiamo che $\alpha \in (1, 2)$.

Applico il metodo di Newton

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0 \end{cases}$$

Abbiamo $f(x) = x^3 - 2$ e $f'(x) = 3x^2$.

Parto della migliore approssimazione che ho in questo momento che è $x_0 = 3/2$.

Per quanto riguarda l'errore, sapiamo che per il metodo di Newton (se la radice è semplice) $|\alpha - x_k| \approx |x_{k+1} - x_k|$. Mi fermerò quando sia $|x_{k+1} - x_k| < 0.01$

$x_0 = 3/2$

$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{(3/2)^3 - 2}{3(3/2)^2} = 3/2 - 0.2037037 = 1.2962963 \qquad |x_1 - x_0| = 0.2037037 \geq 0.01$

$x_2 = 1.2962963 - \frac{(1.2962963)^3 - 2}{3(1.2962963)^2} = 1.2962963 - 0.0353641 = 1.2609322 \qquad |x_2 - x_1| = 0.0353641 \geq 0.01$

$x_3 = 1.2609322 - \frac{(1.2609322)^3 - 2}{3(1.2609322)^2} = 1.2609322 - 0.0010103 = 1.2599219 \qquad |x_3 - x_2| = 0.0010103 < 0.01$

$\sqrt[3]{2} \approx 1.2599219.$

3. Calcolare il polinomio interpolatore dei dati

x_i	-2	-1	1	2	3
y_i	2	1	0	1	1

Costruisco la tabella delle differenze divise

$x_0 = -2 \quad f[x_0] = \mathbf{2}$

$x_1 = -1 \quad f[x_1] = 1 \quad f[x_0, x_1] = \frac{1-2}{-1+2} = \mathbf{-1}$

$x_2 = 1 \quad f[x_2] = 0 \quad f[x_1, x_2] = \frac{0-1}{1+1} = -1/2 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1/2+1}{1+2} = \mathbf{1/6}$

$x_3 = 2 \quad f[x_3] = 1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{1-0}{2-1} = 1 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1+1/2}{2+1} = 1/2$

$x_4 = 3 \quad f[x_4] = 1 \quad f[x_3, x_4] = \frac{1-1}{3-2} = 0 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{0-1}{3-1} = -1/2$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1/2-1/6}{2+2} = \mathbf{1/12}$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{-1/2-1/2}{3+1} = -1/4 \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{-1/4-1/12}{3+2} = \mathbf{-1/15}$

Il polinomio interpolatore è

$$\mathbf{P(x) = 2 - (x+2) + \frac{1}{6}(x+2)(x+1) + \frac{1}{12}(x+2)(x+1)(x-1) - \frac{1}{15}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2).}$$

ANALISI NUMERICA 17 gennaio 2005

Tema B

1. Usando il metodo di eliminazione di Gauss e la sostituzione all'indietro risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Metodo di eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} m_{2,1} = 1/2 \\ m_{3,1} = 1/2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0-1/2 & -1-1/2 & 0-3/2 \\ 0 & -1-1/2 & 2-1/2 & 3-3/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right] \quad m_{3,2} = 3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/2-3\,(-3/2) & 3/2-3\,(-3/2) \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right]$$

Sostituzione all'indietro:

$$x_3 = 6/6 = 1$$

$$x_2 = -2(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_3) = -2(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 - x_2 - x_3) = \frac{1}{2}(3-1) = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Determinare il numero di sottointervalli necessari per approssimare

$$\int_{-1}^{1} xe^x \, dx$$

con errore minore di 10^{-2} usando la formula di Cavalieri-Simpson composita e calcolare l'approssimazione.

Per stimare l'errore nella formula di Cavalieri-Simpson ci serve la derivata quarta della funzione da integrare:

$$f(x) = xe^x \qquad f^{iv}(x) = (4+x)e^x$$

Dalla formula dell'errore quando si usa la fomula di Cavalieri Simpson con m sottointervalli si ha che

$$\left| \int_{-1}^{1} xe^x \, dx - I_m^{CS} \right| \le \frac{2}{180} \left(\frac{2}{2m} \right)^4 \max_{x \in [-1,1]} |(x+4)e^x| = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{m} \right)^4 5\, e$$

Per garantire un errore minore di 10^{-2} devo fare

$$\frac{1}{90}\left(\frac{1}{m}\right)^4 5\,e < 10^{-2} \qquad \frac{100}{90}5\,e < m^4 \qquad m > ^4\sqrt{\frac{50\,e}{9}} = 1.97$$

cioe $\mathbf{m \geq 2}$.

$$\int_{-1}^{1} xe^x\,dx = \int_{-1}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx \approx \frac{1}{6}[f(-1)+4f(-1/2)+f(0)]+\frac{1}{6}[f(0)+4f(1/2)+f(1)]$$

$$= \frac{1}{6}[-e^{-1} - 2\,e^{-1/2}] + \frac{1}{6}[2e^{1/2} + e] = \mathbf{0.7391306}$$

3. Calcolare il polinomio interpolatore dei dati

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	2	1	-1	-1	2

Costruisco la tabella delle differenze divise

$x_0 = -1 \quad f[x_0] = \mathbf{2}$

$x_1 = 0 \quad f[x_1] = 1 \quad f[x_0, x_1] = \frac{1-2}{0+1} = \mathbf{-1}$

$x_2 = 1 \quad f[x_2] = -1 \quad f[x_1, x_2] = \frac{-1-1}{1-0} = -2 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2+1}{1+1} = \mathbf{-1/2}$

$x_3 = 2 \quad f[x_3] = -1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{-1+1}{2-1} = 0 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{0+2}{2-0} = 1$

$x_4 = 4 \quad f[x_4] = 2 \quad f[x_3, x_4] = \frac{2+1}{4-2} = 3/2 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{3/2-0}{4-1} = 1/2$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1+1/2}{2+1} = \mathbf{1/2}$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{1/2-1}{4-0} = -1/8 \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{-1/8-1/2}{4+1} = \mathbf{-1/8}$

Il polinomio interpolatore è

$$\mathbf{P(x) = 2 - (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{1}{2}(x+1)x(x-1) - \frac{1}{8}(x+1)x(x-1)(x-2).}$$