ANALISI NUMERICA 18 aprile 2005

1. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siccome la matrice A è tridiagonale le matici L e U sono bidiagonali

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Moltiplicando le due matrici a destra e tenendo conto della uguaglianza risulta essere

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 2 && \\
&\beta_2\alpha_1 = 2 && \rightsquigarrow \quad \beta_2 = 2/\alpha_1 = 2/2 = 1 \\
&-2\beta_2 + \alpha_2 = -3 && \rightsquigarrow \quad \alpha_2 = -3 + 2\beta_2 = -3 + 2 = -1 \\
&\beta_3\alpha_2 = 1 && \rightsquigarrow \quad \beta_3 = 1/\alpha_2 = 1/(-1) = -1 \\
&\beta_3 + \alpha_3 = 2 && \rightsquigarrow \quad \alpha_3 = 2 - \beta_3 = 2 + 1 = 3 \\
&\beta_4\alpha_3 = -3 && \rightsquigarrow \quad \beta_4 = -3/\alpha_3 = -3/3 = -1 \\
&2\beta_4 + \alpha_4 = -1 && \rightsquigarrow \quad \alpha_4 = -1 - 2\beta_4 = -1 + 2 = 1
\end{aligned}$$

Cioè

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Data la equazione

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

i) Dimostrare che ha soluzione nell'intervallo $(0, 1)$.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ è una funzione continua (è un polinomio) e $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$. È una funzione continua che cambia segno nell'intervallo $(0, 1)$ pertanto esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $f(\alpha) = 0$.

ii) Usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.25.

La prima approssimazione della radice α che possiamo considerare è il punto medio dell'intervallo $(0, 1)$. $C_0 = 1/2$. Possiamo anche dare una stima dell'errore $|\alpha - C_0| < (1 - 0)/2 = 0.5 > 0.25$.
Siccome $f(1/2) = 1/8 - 3/4 + 1 > 0$ sapiamo che α si trova nell'intervallo $(1/2, 1)$. Pertanto adesso possiamo considerare come approssiamzione della radice il punto medio di questo nuovo intervallo $C_1 = 3/4$ con la seguente stima dell'errore: $|\alpha - C_1| < (1 - 1/2)/2 = 0.25$.

iii) Usando il metodo di Newton e tomando come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-2}.

Metodo di Newton:

$$x_0 \text{ assegnato}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|\alpha - x_n| \approx |x_n - x_{n+1}|$$

Ci chiedono di partire da $x_0 = 3/4$, iterare nel seguente modo

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^3 - 3x_n^2 + 1)/(3x_n^2 - 6)$$

e fermarci quando $|x_{n+1} - x_n| = |(x_n^3 - 3x_n^2 + 1)/(3x_n^2 - 6)| < 10^{-2}$.

$x_0 = 3/4$

$x_1 = 3/4 - \frac{(3/4)^3 - 3\cdot(3/4)^2 + 1}{3\cdot(3/4)^2 - 6\cdot 3/4} = 3/4 - 0.094444 = 0.655556$

$|x_1 - x_0| = 0.094444 > 10^{-2}$

$x_2 = 0.655556 - \frac{0.655556^3 - 3\cdot 0.655556^2 + 1}{3\cdot 0.655556^2 - 6\cdot 0.655556} = 0.655556 - 0.002849 = \mathbf{0.652707}$

$\mathbf{|x_3 - x_2| = 0.002849 < 10^{-2}}$

3. Calcolare il polinomio interpolatore dei dati

x_i	-3	-1	0	2	3
y_i	-1	0	1	1	3

Costruisco la tabella delle differenze divise

$x_0 = -3 \quad f[x_0] = \mathbf{-1}$

$x_1 = -1 \quad f[x_1] = 0 \quad f[x_0, x_1] = \frac{0+1}{-1+3} = \mathbf{1/2}$

$x_2 = 0 \quad f[x_2] = 1 \quad f[x_1, x_2] = \frac{1-0}{0+1} = 1 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1-1/2}{0+3} = \mathbf{1/6}$

$x_3 = 2 \quad f[x_3] = 1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{1-1}{2-0} = 0 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{0-1}{2+1} = -1/3$

$x_4 = 3 \quad f[x_4] = 3 \quad f[x_3, x_4] = \frac{3-1}{3-2} = 2 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{2-0}{3-0} = 2/3$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1/3-1/6}{2+3} = \mathbf{-1/10}$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2/3+1/3}{3+1} = 1/4 \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{1/4+1/10}{3+3} = \frac{10+4}{240} = \mathbf{7/120}$

Il polinomio interpolatore è

$$\mathbf{P(x) = -1 + \frac{1}{2}(x+3) + \frac{1}{6}(x+3)(x+1) - \frac{1}{10}(x+3)(x+1)x + \frac{7}{120}(x+3)(x+1)x(x-2).}$$