COGNOME ______ NOME ______

N. Matricola ______

Firma dello studente ______

I Appello di Analisi Numerica

25 gennaio 2007

Esercizio 1

Approssimare

$$\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx\,.$$

usando il metodo dei trapezi con quattro sottointervalli e dare una stima dell errore.

Dividendo l'intervallo $[0,2]$ in quattro, gli estremi dei sottointervalli e i corrispondenti valori di $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ sono:

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	$3/\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$5/\sqrt{13}$	$3/\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} I_4^{TC} &= \tfrac{2-0}{4}\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \tfrac{1}{2}f(2)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} + \tfrac{5}{\sqrt{13}} + \tfrac{3}{2\sqrt{5}}\right] \\ &= 2.65671262 \end{aligned}$$

Per stimare l'errore usiamo che $|\int_a^b f(x)\,dx - I_{2N}^{TC}| \approx \frac{1}{3}|I_N^{TC} - I_{2N}^{TC}|$.

$$\begin{aligned} I_2^{TC} &= \tfrac{2-0}{2}\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + \tfrac{1}{2}f(2)\right] \\ &= \tfrac{1}{2} + \sqrt{2} + \tfrac{3}{2\sqrt{5}} \\ &= 2.58503396 \end{aligned}$$

$$|\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx - I_4^{TC}| \approx \frac{1}{3}|2.65671262 - 2.58503396| = 0.02389289.$$

Esercizio 2

Calcolare il polinomio interpolatore e la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dei seguenti dati

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	-3	-1	-1	0	3

Per calolare il polinomio interpolatore uso la forma di Newton. Costruisco la tabella delle differenze divise:

$$x_0 = -1 \quad y_0 = -3$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = -1 \quad f[x_0, x_1] = \tfrac{-1+3}{0+1} = 2$$

$$x_2 = 1 \quad y_2 = -1 \quad f[x_1, x_2] = \tfrac{-1+1}{1-0} = 0 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \tfrac{0-2}{1+1} = -1$$

$$x_3 = 2 \quad y_3 = 0 \quad f[x_2, x_3] = \tfrac{0+1}{2-1} = 1 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \tfrac{1-0}{2-0} = 1/2$$

$$x_4 = 4 \quad y_4 = 3 \quad f[x_3, x_4] = \tfrac{3-0}{4-2} = 3/2 \quad f[x_2, x_3, x_4] = \tfrac{3/2-1}{4-1} = 1/6$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \tfrac{1/2+1}{2+1} = 1/2$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \tfrac{1/6-1/2}{4-0} = -1/12 \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \tfrac{-1/12-1/2}{4+1} = -7/60$$

Il polinomio interpolatore risulta:

$$P(x) = -3 + 2(x+1) - (x+1)x + \frac{1}{2}(x+1)x(x-1) - \frac{7}{60}(x+1)x(x-1)(x-2).$$

Per calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $r(x) = a_0 + a_1 x$ si risolve il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 1 & \sum_{i=0}^4 x_i \\ \sum_{i=0}^4 x_i & \sum_{i=0}^4 x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^4 y_i \\ \sum_{i=0^4} x_i\, y_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$5a_0 + 6a_1 = -2\,, \quad a_0 = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}a_1$$

$$-\frac{12}{5} - \frac{36}{5}a_1 + 22a_1 = 14\,, \quad -12 - 36a_1 + 110a_1 = 70\,, \quad -12 + 74a_1 = 70\,, \quad a_1 = \frac{82}{74} = \frac{41}{37}\,.$$

$$a_0 = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}\,\frac{41}{37} = \frac{-2\cdot 37 - 6\cdot 41}{5\cdot 37} = -\frac{320}{185} = -\frac{64}{37}$$

La retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati è: $r(x) = -\frac{64}{37} + \frac{41}{37}x$.

Esercizio 3

Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tenendo conto che la matrice A è tridiagonale

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 = -1 & & \\ \beta_2\alpha_1 = 2 & \rightsquigarrow & \beta_2 = 2/\alpha_1 = -2 \\ 2\beta_2 + \alpha_2 = -1 & \rightsquigarrow & \alpha_2 = -1 - 2\beta_2 = -1 + 4 = 3 \\ \beta_3\alpha_2 = 4 & \rightsquigarrow & \beta_3 = 4/\alpha_2 = 4/3 \\ \beta_3 + \alpha_3 = 1 & \rightsquigarrow & \alpha_3 = 1 - \beta_3 = -1/3 \\ \beta_4\alpha_3 = 3 & \rightsquigarrow & \beta_4 = 3/\alpha_3 = -9 \\ -\beta_4 + \alpha_4 = 2 & \rightsquigarrow & \alpha_4 = 2 + \beta_4 = -7 \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si risolvono due sistemi triangolari $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -5$, $y_2 = 5 + 2y_1 = -5$, $y_3 = -10 - \frac{4}{3}y_2 = -10/3$, $y_4 = 2 + 9y_3 = -28$.

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -10/3 \\ -28 \end{bmatrix}$$

$x_4 = 4$, $x_3 = -3(\frac{-10}{3} + x_4) = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}(-5 - x_3) = -1$, $x_1 = -(-5 - 2x_2) = 3$.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4

Siano $f(x) = (3+2x-x^2)(x^2+3)$ e $g(x) = (x^2+5)e^{-x}$. L'equazione $f(x) = g(x)$ ha due radici $x_1 < x_2$. Scrivere un script di Octave che:

- calcoli $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$;
- disegni i grafici sovraposti delle due funzioni in modo di visualizare le due radici;
- calcoli le due radici x_1 e x_2;
- approssimi l'area della regione compresa tra le due curve da x_1 a x_2.

```
f='(3+2*x-x.^2).*(x.^2+3);';
g='(x.^2+5).*exp(-x);';
int=quad(f,-1,3)
x=linspace(-1,4);
fx=eval(f);
gx=eval(g);
plot(x,fx,x,gx);
h='(3+2*x-x.^2).*(x.^2+3) -(x.^2+5).*exp(-x)';
x1=fsolve(h,-1)
x2=fsolve(h,3)
area=quad(h,x1,x2)
```

$\boldsymbol{\int_{-1}^{3} \mathbf{f(x)\,dx} = \mathbf{51.200}}$

$x_1 = -0.31845$

$x_2 = 2.9852$

Area: 40.668