COGNOME [ ] NOME [ ]

N. Matricola [ ]

Firma dello studente ______________________ **A**

I Prova di Analisi Numerica

30 ottobre 2006

Esercizio 1

Calcolare (senza usare Octave) il polinomio interpolatore dei dati:

x_i	-2	-1	0	2	3
y_i	0	1	1	-1	-2

e dei dati:

x_i	-2	-1	0	2	3	4
y_i	0	1	1	-1	-2	-2

Calcoliamo la tabella delle differenze finite:

$x_0 = -2 \quad f[x_0] = 0$

$x_1 = -1 \quad f[x_1] = 1 \quad f[x_0, x_1] = \frac{1-0}{-1+2} = 1$

$x_2 = 0 \quad f[x_2] = 1 \quad f[x_1, x_2] = 0 \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0-1}{0+2} = -1/2$

$x_3 = 2 \quad f[x_3] = -1 \quad f[x_2, x_3] = \frac{-1-1}{2-0} = -1 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1-0}{2+1} = -1/3$

$x_4 = 3 \quad f[x_4] = -2 \quad f[x_3, x_4] = \frac{-2+1}{3-2} = -1 \quad f[x_2, x_3, x_4] = 0$

$x_5 = 4 \quad f[x_5] = -2 \quad f[x_4, x_5] = 0 \quad f[x_3, x_4, x_5] = \frac{0+1}{4-2} = 1/2$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1/3+1/2}{2+2} = 1/24$

$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0+1/3}{3+1} = 1/12 \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{1/12-1/24}{3+2} = 1/120$

$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{1/2-0}{4} = 1/8 \qquad f[x_1, x_2, x_3, x_4.x_5] = \frac{1/8-1/12}{4+1} = 1/120 \qquad f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.x_5] = 0$

Siccome $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.x_5] = 0$ risulta

$$\Pi_4 f(x) = \Pi_5 f(x) = 0 + 1(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)(x+1) + \frac{1}{24}(x+2)(x+1)x + \frac{1}{120}(x+2)(x+1)x(x-2)\,.$$

Esercizio 2

Usando il metodo dei trapezi, approssimare con errore minore di 0.01

$$\int_0^{1/2} e^{x+x^2}\,dx\,.$$

Quanti sottointervalli bisogna usare?

La formula dell'errore per il metodo dei trapezi ci dice che, chiamando I_{TC}^N l'integrale approssimato calcolato usando il metodo dei trapezi con N sottointervalli

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - I_{TC}^N\Big| \le \frac{b-a}{12}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^2 \max_{x\in(a,b)} |f''(x)|$$

In questo caso $a = 0$, $b = 0.5$ e

$$f(x) = e^{x+x^2} \qquad f'(x) = (1+2x)e^{x+x^2} \qquad f''(x) = [2+(1+2x)^2]e^{x+x^2}$$

quindi $\max_{x\in(0,0.5)} |f''(x)| \le (2+2^2)e^{3/4}$.
Risulta

$$\Big|\int_0^{1/2} e^{x+x^2}\,dx - I_{TC}^N\Big| \le \frac{0.5}{12}\Big(\frac{1}{2N}\Big)^2 6e^{3/4} < 0.01$$

se $N^2 > \frac{1}{24}\frac{1}{4}6e^{3/4}\,100$, $N^2 > \frac{100e^{3/4}}{16}$ cioè

$$N > \frac{10}{4}\sqrt{e^{3/4}} = 3.6375\,, \qquad \mathbf{N} \ge \mathbf{4}\,.$$

Calcoliamo adesso I_{TC}^4

$$\begin{aligned}
I_{TC}^4 &= \tfrac{0.5}{4}\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(0.125) + f(0.25) + f(0.375) + \tfrac{1}{2}f(0.5)\right] \\
&= \tfrac{0.5}{4}\left[\tfrac{1}{2}1 + 1.1510 + 1.3668 + 1.6747 + \tfrac{1}{2}2.1170\right] \\
&= 0.7188
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Usando solo somme, prodotti e divisioni, approssimare $\sqrt[5]{11}$, con errore stimato minore di 10^{-6}.

Si tratta di trovare $\alpha = \sqrt[5]{11}$, cioè, α tale che $\alpha^5 - 11 = 0$. Uso il metodo di Newton.
Siccome $2^6 > 11$ so che $\alpha \in (1, 2)$ e scelgo $x_0 = 3/2$. L'iterazioni del metodo di Newtono sono

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^5 - 11}{5x_k^4}$$

perche $f(x) = x^5 - 11$ e $f'(x) = 5x^4$, e mi fermerò quando $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

$$\begin{aligned}
&x_0 = 3/2 \\
&x_1 = 3/2 - \tfrac{(3/2)^5 - 11}{5(3/2)^4} = 3/2 + 0.13456790 = 1.63456790 \\
&x_2 = 1.63456790 - 0.01872906 = 1.61583884 \\
&x_3 = 1.61583884 - 0.00044433 = 1.61539451 \\
&x_4 = 1.61539451 - 0.00000024 = 1.61539427
\end{aligned}$$

Siccome $|x_3 - x_4| = 0.24\,10^{-6} < 10^{-6}$ prendo come approssimazione di $\sqrt[5]{11} \approx 1.61539427$.

Esercizio 4

Quante soluzioni ha l'equazione

$$(5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2} = 2\,?$$

Scrivere un script di Octave che

- disegni il grafico della funzione $f(x) = (5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2}$ nell'intervallo $[-3, 3]$,
- calcoli la più piccola, a, e la più grande, b, delle soluzioni di $(5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2} = 2$
- calcoli
$$\int_a^b \left[(5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2} - 2\right] dx\,;$$
- chieda in input un numero naturale n e calcoli il polinomio di grado n , $\Pi_n f(x)$, che interpola la funzione $f(x) = (5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2}$ in punti equispaziati dell'intervallo $[-3, 3]$ (estremi compressi),
- disegni i grafici della funzione $f(x)$ e del polinomio $\Pi_n f(x)$.

Numero di soluzioni dell'equzione $(5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2} = 2$**?** **2**

Soluzione più piccola $a =$ **-1.83792068**

Soluzione più grande $b =$ **1.65506668**

$\int_a^b \left[(5x^2 - 2x + 1)e^{1-x^2} - 2\right] dx =$ **8.56601780**

```
xx=linspace(-3,3);
fxx=(5*xx.^2-2*xx+1).*exp(1-xx.^2);
plot(xx,fxx,[-3 3],[2 2]);
fun='(5*x.^2-2*x+1).*exp(1-x.^2)-2',
a=fsolve(fun,-2)
b=fsolve(fun,2)
int=quad(fun,a,b)
n=input('n= ');
x=linspace(-3,3,n+1);
fx=(5*x.^2-2*x+1).*exp(1-x.^2);
p=polyfit(x,fx,n);
pxx=polyval(p,xx);
plot(xx,fxx,xx,pxx)
```