Esercizi 10 dicembre 2019

Esercizio 1 (12 giugno 2017) Trovare per quali valori del parametro α il seguente metodo di Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\
& \quad K_1 = f(t_i, u_i) \\
& \quad K_2 = f(t_i + \alpha h, u_i + \alpha h K_1) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{5}(2K_1 + 3K_2)
\end{aligned}
$$

è di ordine $p = 2$ e si trovino le condizioni di assoluta stabilitá (quando $\lambda \in \mathbb{R}$).

Sia dato il problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = ty^2 & t \in t > -1/2 \\ y(-1/2) = 4/3 \end{cases}
$$

che ammette soluzione esatta $y(t) = -\frac{1}{t^2-1}$. Utilizzando questo metodo di Runge -Kutta con $h = 0.25$ si calcoli un'approssimazione della soluzione esatta in $t = 0$ e l'errore commesso utilizzando 5 cifre per il calcolo.

Esercizio 2 (22 gennaio 2019) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0 + T) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}
$$

si consideri il seguente metodo multistep

$$
u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{h}{4}[7f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})]\,.
$$

Dire se il metodo è

1. consistente e qual è l'ordine di consistenza;
2. zero-stabile;
3. assolutamente stabile se applicato al problema modello

$$
\begin{cases} y'(t) = -y(t) & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}
$$

Esercizio 3 (5 settembre 2018) Per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}
$$

si consideri il seguente metodo multistep

$$
u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) h[f(t_{n-1}, u_{n-1}) - 3f(t_n, u_n)]
$$

Si studino, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, consistenza e 0-stabilità.