Analisi Numerica I
Radici di polinomi

Ana Alonso

ana.alonso@unitn.it

11 ottobre 2019

Radici di un polinomio

Per approssimare le radici del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

si usa il comando `roots`.

Ad esempio, se $p(x) = 3x^4 - x^2 + 5x$

```
>> P=[3 0 -1 5 0];
>> R=roots(P)
R =
  0.0000 + 0.0000i
  -1.2792 + 0.0000i
   0.6396 + 0.9454i
   0.6396 - 0.9454i
```

P e R sono due vettori:

- P ha cinque componenti che sono i coefficienti del polinomio p ordinati da quello di grado 4 a quello di grado 0.
- R ha quattro componenti che sono approssimazioni delle radici di p, due reali e due complesse.

Radici di un polinomio

Se $a_n \neq 0$ il polinomio

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(x) &= x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} \\ &= x^n + \widetilde{a}_{n-1}x^{n-1} + \dots + \widetilde{a}_1 x + \widetilde{a}_0\end{aligned}$$

ha le stesse radici di $p(x)$.

Il comando `roots` approssima gli autovalori della "matrice compagna" del polinomio $\widetilde{p}(x)$

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{a}_{n-1} & -\widetilde{a}_{n-2} & \dots & \dots & -\widetilde{a}_1 & -\widetilde{a}_0 \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Radici di un polinomio

Ad esempio per $n = 4$ la matrice compagna e il suo polinomio caratteristico sono

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{a}_3 & -\widetilde{a}_2 & -\widetilde{a}_1 & -\widetilde{a}_0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -\widetilde{a}_3 - x & -\widetilde{a}_2 & -\widetilde{a}_1 & -\widetilde{a}_0 \\ 1 & -x & & \\ & 1 & -x & \\ & & 1 & -x \end{vmatrix} .$$

Quindi il polinomio caratteristico della matrice compagna è

$$\widetilde{a}_0 + x(\widetilde{a}_1 + x(\widetilde{a}_2 + x(\widetilde{a}_3 + x))) = \widetilde{p}(x) .$$

Questa è la forma di Horner del polinomio $\widetilde{p}(x)$.

Forma di Horner di un polinomio

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \quad \text{Forma standard} \\
&= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + a_4x))) \quad \text{Forma di Horner} \\
&= \mathtt{P(5)} + x(\mathtt{P(4)} + x(\mathtt{P(3)} + x(\mathtt{P(2)} + x\mathtt{P(1)}))) \,.
\end{aligned}
$$

Numero di operazioni per valutare $p(z)$

- usando la forma di Horner: 4 somme e 4 prodotti;
- usando la forma standard: 4 somme e (4+3) prodotti. I 3 prodotti in più sono per il calcolo di z^4.

```
pz=P(1);
for j=2:n+1
    pz=P(j)+z*pz;
end
```

Forma di Horner di un polinomio

```
function pz=horner(P,z)
N=length(P);  % N=n+1
pz=P(1);
for j=2:N
    pz=P(j)+z*pz;
end
```

Esempio di uso:

```
>> P=[3 0 -1 5 0];
>> p1=horner(P,1)
p1 =
     7
```

Il comando di Matlab per valutare un polinomio è il comando `polyval`

```
>> P=[3 0 -1 5 0];
>> p1=polyval(P,1)
p1 =
     7
>> pv=polyval(P,[-1 0 1])
pv =
    -3      0      7
```

Divisione di polinomi

$$p(x) = q(x)(x - z) + r$$

Chiaramente $r = p(z)$.

- Se $p(x)$ è un polinomio di grado n in Matlab useremo un vettore di $n+1$ componenti `P`.
  Le componenti di P saranno i coefficienti del polinomio $p(x)$ ordinati da quello di grado n a quello di grado zero.
- $q(x)$ sarà un polinomio di grado $n-1$ e useremo un vettore di n componenti `Q`.
  Le componenti di `Q` saranno i coefficienti del polinomio $q(x)$ ordinati da quello di grado $n-1$ a quello di grado zero.

Divisione di polinomi

```
function [pz,Q,qz]=hornerD(P,z)
N=length(P);  % N=n+1
Q=zeros(1,N-1);

pz=P(1)
for j=2:N
    Q(j-1)=pz;
    pz=P(j)+z*pz;
end
qz=Q(1)
for j=2:N-1
    qz=Q(j)+z*qz;
end
```

```
function [pz,Q,qz]=hornerD2(P,z)
N=length(P);  % N=n+1
Q=zeros(1,N);
Q(1)=0;
pz=P(1);
for j=2:N
    Q(j)=pz;
    pz=P(j)+z*pz;
end
qz=Q(1);
for j=2:N
    qz=Q(j)+z*qz;
end
```

Divisione di polinomi

```
function [pz,Q,qz]=hornerD3(P,z)
N=length(P);  % N=n+1
Q=zeros(1,N);
Q(1)=0;
pz=P(1);
qz=Q(1);
for j=2:N
    Q(j)=pz;
    pz=P(j)+z*pz;
    qz=Q(j)+z*qz;
end
```

```
function [pz,qz]=hornerPD(P,z)
N=length(P);  % N=n+1


pz=P(1);
qz=0;
for j=2:N

    qz=pz+z*qz;
    pz=P(j)+z*pz;
end
```

Metodo di Newton-Horner

$$p(x) = q(x)(x - z) + r$$

$$p(z) = r \text{ e } p'(x) = q'(x)(x - z) + q(x) \Rightarrow p'(z) = q(z)\,.$$

```
function [x,niter]=NH(P,x)
toll=1.e-5;
nmax=100;
for niter=1:nmax
    [px,qx]=hornerPD(P,x);
    inc=px/qx;
    x=x-inc;
    if abs(inc) <toll, return, end
end
```