Metodi numerici per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy. $\boxed{25\text{-}11\text{-}2019}$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0+T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si divide l'intervallo (t_0, t_0+T) in N sottointervalli di uguale ampiezza $h = \frac{T}{N}$.

$$t_i = t_0 + ih \qquad i = 0, 1, \dots, N$$

Si cerca un'approssimazione della funzione soluzione del problema di Cauchy $y(t)$ nei punti t_i.

$$u_i \simeq y(t_i) \qquad i = 1, \dots, N$$

(di solito si prende $u_0 = y_0 = y(t_0)$).

La soluzione esatta è una funzione
$y : (t_0, t_0+T) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad y \in C^1$.

Ma la soluzione approssimata è un vettore.
L'errore si può misurare, ad esempio, in questo modo

$$e(h) = \max_{0 \le i \le N_h} |y(t_i) - u_i|$$

$$h = \frac{T}{N}$$

Il metodo di Eulero si può derivare osservando che

$$y'(t_i) \simeq \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$$

Ci aspettiamo quindi che l'approssimazione migliore quando $h \longrightarrow 0$

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \underset{(*)}{\simeq} y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

Conosco $y(t_0) = y_0$

$$y(t_1) \underset{(*)}{\simeq} y(t_0) + h f(t_0, y(t_0)) = y_0 + h f(t_0, y_0) = u_1$$

$$y(t_2) \underset{(*)}{\simeq} y(t_1) + h f(t_1, y(t_1)) \simeq u_1 + h f(t_1, u_1) = u_2$$

Perché non sono più all'istante iniziale dove conosco il valore esatto

$$y(t_3) \simeq y(t_2) + h f(t_2, y(t_2)) \simeq u_2 + h f(t_2, u_2) = u_3$$

Eulero esplicito (in avanti)

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \quad \text{dato} \\ \text{Per } i = 0, \dots, N-1 \\ \quad u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i) \end{cases}$$

Voglio stimare $|y(t_{i+1}) - u_{i+1}|$ per $i=0,1,\dots,N-1$

Definisco
$$u^*_{i+1} = y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))$$

$$|y(t_{i+1}) - u_{i+1}| \le |y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}| + |u^*_{i+1} - u_{i+1}| \le (*)$$

$$y(t_{i+1}) - [y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))] =$$
$$= y(t_{i+1}) - y(t_i) - h y'(t_i) = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$
$$\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

Supponiamo $M = \max_{t\in[t_0, t_0+T]} |y''(t)| < +\infty$

$$(*) \le \frac{h^2}{2} M + |u^*_{i+1} - u_{i+1}|$$

$$\begin{aligned} y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)) &= u^*_{i+1} \\ u_i + h f(t_i, u_i) &= u_{i+1} \end{aligned}$$

$$y(t_i) - u_i + h[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, u_i)] = u^*_{i+1} - u_{i+1}$$

$$|u^*_{i+1} - u_{i+1}| \le |y(t_i) - u_i| + h L |y(t_i) - u_i| = (**)$$

$f(t,z)$ è uniformemente lipschitziana nella seconda variabile con costante L

$$(**) \quad = (1+hL)\,|y(t_i)-u_i|$$

$$|y(t_{i+1})-u_{i+1}| \le \frac{h^2}{2}M + (1+hL)\,|y(t_i)-u_i|$$

$$\le \frac{h^2}{2}M + (1+hL)\left[\frac{h^2}{2}M + (1+hL)\,|y(t_{i-1})-u_{i-1}|\right]$$

$$= \frac{h^2}{2}M\left(1+(1+hL)\right) + (1+hL)^2\,|y(t_{i-1})-u_{i-1}|$$

$$\le \frac{h^2}{2}M\left(1+(1+hL)\right) + (1+hL)^2\left[\frac{h^2}{2}M + (1+hL)|y(t_{i-2})-u_{i-2}|\right]$$

$$= \frac{h^2}{2}M\left[1+(1+hL)+(1+hL)\right] + (1+hL)^3\,\underbrace{|y(t_{i-2})-u_{i-2}|}$$

$$\le \dots \le \frac{h^2}{2}M\sum_{j=0}^{i}(1+hL)^j + (1+hL)^{i+1}\,|y(t_0)-u_0| =$$

Se abbiamo definito $u_0 = y_0 = y(t_0)$

$$= \frac{h^2}{2}M\,\frac{(1+hL)^{i+1}-1}{\cancel{1}+\cancel{h}L\cancel{-1}} \le \frac{h}{2}\frac{M}{L}\underbrace{(1+hL)^{i+1}} \le$$

$$\le \frac{h}{2}\frac{M}{L}e^{\underbrace{Lh(i+1)}_{\le T}} \le \frac{h}{2}\frac{M}{L}e^{LT}$$

$\hookrightarrow \quad 1+hL \le e^{hL}$

$$|y(t_{i+1})-u_{i+1}| \le \frac{h}{2}\frac{M}{L}e^{LT}$$

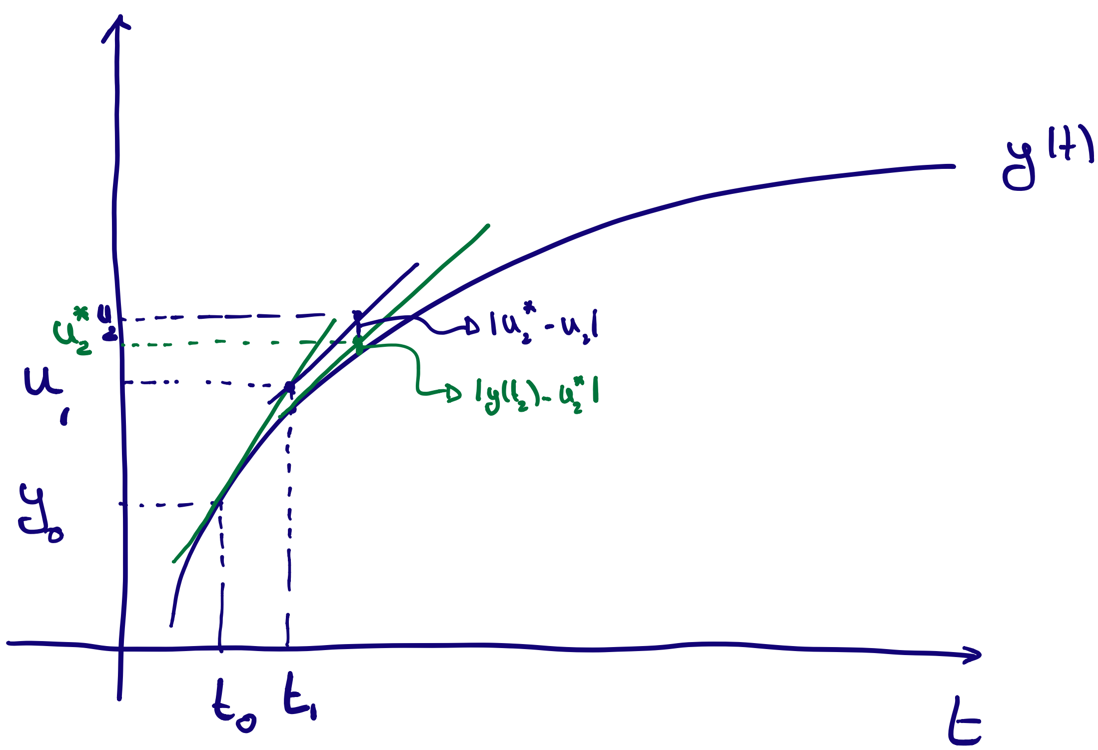
$$\underbrace{\max_{0 \le i \le N} |y(t_i) - u_i|}_{e(h)} \le \frac{h}{2} \frac{M}{L} e^{LT} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Abbiamo dimostrato che il metodo di Eulero è convergente

$$\lim_{h \to 0} e(h) = 0$$

(l'errore è un infinitesimo con h. L'ordine di questo infinitesimo mi dà l'ordine di convergenza del metodo).

Il metodo di Eulero converge con ordine 1.



$$u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0) = y(t_0) + h y'(t_0)$$
$$u_2 = u_1 + h f(t_1, u_1)$$
$$u_2^* = y(t_1) + h f(t_1, y(t_1))$$

$$\frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}\right) = \frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - \left[y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))\right]\right)$$

$$= \tau_{i+1}(h)$$ Errore di troncamento locale

Errore di troncamento globale

$$\tau(h) = \max_{1 \le i \le N} |\tau_i(h)|$$

Un metodo si dice consistente se

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

cioè se l'errore di troncamento globale è un infinitesimo in h. L'ordine di consistenza è l'ordine di questo infinitesimo.

Nel metodo di Eulero

$$\frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}\right) = \frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - y(t_i) - h f(t_i, y(t_i))\right]$$

$$= \frac{1}{h} \frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$E(h) \le \frac{h}{2} M \qquad \left(M = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |y''(t)| \right)$$

Il metodo di Eulero è consistente con ordine 1.

Il metodo di Crank-Nicolson si può derivare in questo modo.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\, dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \qquad\qquad \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right] - \frac{h^3}{12} y'''(\xi_i)$$

Formula dell'errore per il metodo del trapezio

$$y(t_{i+1}) = \overbrace{y(t_i) + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]}^{u^*_{i+1}} \boxed{- \frac{h^3}{12} y'''(\xi_i)}$$

$$y(t_{i+1}) \simeq y(t_i) + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

Consistenza

$$\frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - y(t_i) - \frac{h}{2}\left(f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right)\right] = -\frac{h^2}{12} y'''(\xi_i)$$

Metodo di Crank-Nicolson

$$u_0 = y_0$$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})\right]$$

$$y(t_{i+1}) - u_{i+1} = \underbrace{y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}}_{(\square)} + u^*_{i+1} - u_{i+1}$$

$$u^*_{i+1} = y(t_i) + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{h^3}{12} y'''(\xi_i)}_{(\square)} + u^*_{i+1} - u_{i+1}$$

$$u^*_{i+1} = y(t_i) + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})\right]$$

$$u^*_{i+1} - u_{i+1} = y(t_i) - u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) - f(t_{i+1}, u_{i+1})\right]$$

$$|u^*_{i+1} - u_{i+1}| \leq |y(t_i) - u_i| + \frac{h}{2}\left[L\,|y(t_i) - u_i| + L\,|y(t_{i+1}) - u_{i+1}|\right]$$

$$|y(t_{i+1}) - u_{i+1}| \leq \frac{h^3}{12}|y'''(\xi_i)| + \left(1+\frac{h}{2}L\right)|y(t_i)-u_i|$$
$$+ \frac{h}{2}L\,|y(t_{i+1}) - u_{i+1}|$$

$$\leq \frac{h^3}{12}\ \tilde{M} \ + \left(1+\frac{h}{2}L\right)\ |y(t_i) - u_i|$$
$$\hookrightarrow \tilde{M} = \max_{t\in[t_0,t_0+T]} |y'''(t)| \quad + \frac{h}{2}L\,|y(t_{i+1}) - u_{i+1}|$$

$$\left(1-\frac{h}{2}L\right)|y(t_{i+1}) - u_{i+1}| \leq \frac{h^3}{12}\tilde{M} + \left(1+\frac{h}{2}L\right)|y(t_i)-u_i|$$
$$|y(t_{i+1}) - u_{i+1}| \leq \left(1-\frac{h}{2}L\right)^{-1}\frac{h^3}{12}\tilde{M} + \frac{2+hL}{2-hL}\,|y(t_i)-u_i|$$

Si può dimostrare che il metodo di Crank-Nicolson è convergente con ordine 2

Abbiamo dimostrato che il metodo di Crank-Nicolson è consistente con ordine 2

$$\frac{1}{h}\left(y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}\right) = -\frac{h^2}{12}\ y'''(\xi_i)$$

Quindi $\quad \tau(h) \leq \frac{h^2}{12}\ \tilde{M}$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}\left[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right] + O(h^3) \quad \left(-\frac{h^3}{12} y'''(\xi_i)\right)$$

$$y(t_{i+1}) = \underbrace{y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i))} + O(h^2) \quad \left(\frac{h^2}{2} y''(\xi_i)\right)$$

f è Lipschitziana nella seconda variabile

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}\Big[\underbrace{f(t_i, y(t_i))}_{K_1} + \overbrace{f(t_i+h, y(t_i) + h\underbrace{f(t_i, y(t_i))}_{K_1})}^{K_2}\Big] + O(h^3)$$

Il metodo di Heun

$u_0 = y(t_0)$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$K_1 = f(t_i, u_i)$

$K_2 = f(t_i + h, u_i + hK_1)$

$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$

Il metodo di Heun è un metodo esplicito.

Abbiamo dimostrato che ha ordine di consistenza 2

Si può dimostrare che è convergente con ordine di convergenza due.