Problema di Cauchy

26-11-2019

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_0+T) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

I dati sono la funzione $f(t,z)$ l'istante iniziale t_0, il valore iniziale y_0 e l'intervallo (t_0, t_0+T) (quindi T).

Per l'approssimazione della soluzione si divide l'intervallo in N sottointervalli di ampiezza $h = \frac{T}{N}$.

La soluzione approssimata è un vettore di N componenti (in realtà di $N+1$ componenti) u_i $i=1,\dots,N$ ma con $u_0 = y_0$. e vorremo $u_i \simeq y(t_i)$ essendo $t_i = t_0 + ih$ $i = 1, \dots, N$.

Metodo di Eulero

$u_0 = y_0$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i)$

$$e(h) = \max_{0 \le i \le N_h} |y(t_i) - u_i| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Metodo di Crank-Nicolson

$u_0 = y_0$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})\right]$

Metodo di Heun

$u_0 = y_0$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, u_i) + f(t_i + h, u_i + h f(t_i, u_i))\right]$$

Questo è un metodo esplicito

Sono tutti tre metodi ad un passo: per calcolare l'approssimazione di y nell'istante t_{i+1} mi basta conoscere l'approssimazione di y nell'istante precedente t_i.

Abbiamo dimostrato che

$$\frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - \left(y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))\right)\right] = O(h)$$

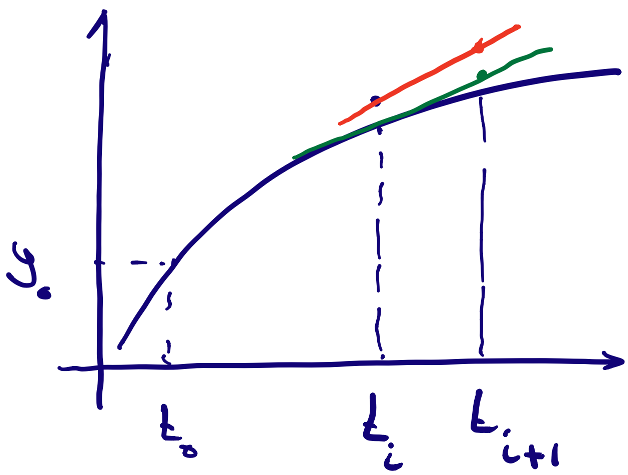
(Il metodo di Eulero è consistente con ordine di consistenza 1).

$$\frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - \left(y(t_i) + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y(t_i)) + f(t_i + h, y(t_i) + h f(t_i, y(t_i)))\right)\right)\right]$$

$$= O(h^2)$$

Il metodo di Heun è consistente con ordine di consistenza 2.

Abbiamo dimostrato che il metodo di Eulero converge e che l'ordine di convergenza è 1.



$$y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i)) = u^*_{i+1}$$

$$u_i + h\, f(t_i, u_i)$$

$$y(t_{i+1}) - u_{i+1} = \underbrace{y(t_{i+1}) - u^*_{i+1}}_{h\, \varepsilon_{i+1}(h)} + \underline{\underline{u^*_{i+1} - u_{i+1}}}$$

Metodi <u>espliciti</u> ad un passo

$u_0 = y_0$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$$u_{i+1} = u_i + h \underbrace{\Phi_f(t_i, u_i; h)}_{\text{funzione incremento del metodo}}$$

Eulero $\Phi_f = f$

Heun $\Phi_f(t, z; h) = \frac{1}{2}\underbrace{\left[f(t,z) + f(t+h, z+hf(t,z))\right]}_{\Phi_f(t,z,h)}$

Si dice che un metodo esplicito a un passo è consistente se

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

essendo $\tau(h)$ l'errore di troncamento globale.

Sia $\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - y(t_i) - h\Phi_f(t_i, y(t_i); h)\right]$

$\tau_{i+1}(h)$ si dice errore di troncamento locale

$$\mathcal{E}(h) = \max_{1 \le i \le N} |\mathcal{E}_i(h)|$$

La <u>zero stabilità</u> misura quanto "il metodo è sensibile" a perturbazioni nei dati.

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + h\,\Phi_f(t_i, u_i; h) \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i + h\left[\Phi_f(t_i, z_i; h) + \delta_{i+1}\right] \\ z_0 = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

Il metodo è zero-stabile se $\exists\, h_0 > 0$ e $C > 0$: $\forall\, h \in (0, h_0]$

$$\max_{0 \le i \le N} |u_i - z_i| \le C\,\varepsilon$$

se $\max_{0 \le i \le N} |\delta_i| \le \varepsilon$.

$$\begin{cases} y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\left[\Phi_f(t_i, y(t_i); h) + \mathcal{E}_{i+1}(h)\right] \\ y(t_0) = y_0 + 0 \end{cases}$$

$$z_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_{i+1}) - y(t_i) - h\,\Phi_f(t_i, y(t_i); h)\right]$$

$$\max_{0\le i\le N} |y(t_i) - u_i| \le C \max_{0\le i\le N} |z_i(h)|$$

avendo definito $z_0(h) = 0$

zero-stabilità + consistenza

$$\Downarrow$$

convergenza.

Influenza degli errori di arrotondamento per il metodo di Eulero

$$u_0 = y(t_0) + \varepsilon_0$$

per $i = 0, \dots, N-1$

$$u_{i+1} = u_i + h\, f(t_i, u_i) + \varepsilon_i$$

$$|y(t_{i+1}) - u_{i+1}| \le |y(t_i) - u^*_{i+1}| + |u^*_{i+1} - u_{i+1}|$$

$$u^*_{i+1} = y(t_i) + h\, f(t_i, y(t_i))$$

$$\le \frac{h^2}{2} M + \left| y(t_i) - u_i + h\big(f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, u_i)\big) - \varepsilon_i \right|$$

$$\le \frac{h^2}{2} M + (1+hL)\,|y(t_i) - u_i| + |\varepsilon_i|$$

$$\le \frac{h^2}{2} M + (1+hL)\left[\frac{h^2}{2} M + (1+hL)\,|y(t_{i-1}) - u_{i-1}| + |\varepsilon_{i-1}|\right] + |\varepsilon_i|$$

$$= \frac{h^2}{2} M \big(1 + (1+hL)\big) + |\varepsilon_i| + (1+hL)|\varepsilon_{i-1}| + (1+hL)^2\, |y(t_{i-1}) - u_{i-1}|$$

Se $|\varepsilon_i| \le \varepsilon \quad \forall\, i$

$$\le \left(\frac{h^2}{2}M+\varepsilon\right)\left(1+(1+hL)\right) + (1+hL)^2\,|y(t_{i-1})-u_{i-1}|$$

$$\le \dots \le \left(\frac{h^2}{2}M+\varepsilon\right)\underbrace{\sum_{j=0}^{i}(1+hL)^j}_{\frac{(1+hL)^{i+1}-1}{\cancel{1+}hL\,\cancel{-1}}} + (1+hL)^{i+1}\underbrace{|y(t_0)-u_0|}_{|\varepsilon_0|}$$

$$\le \left(\frac{h^2}{2}M+\varepsilon\right)\frac{1}{hL}(1+hL)^{i+1} + (1+hL)^{i+1}|\varepsilon_0|$$

$$= \underbrace{(1+hL)^{i+1}}_{\le\, e^{LT}}\left(\underbrace{\frac{1}{\cancel{h}L}\frac{h^2}{2}M}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0} + \underbrace{\frac{1}{hL}\varepsilon}_{\xrightarrow{h\to 0}\ \infty} + |\varepsilon_0|\right)$$

Un altro esempio di metodo ad un passo esplicito: il metodo RK4

Come il metodo di Heun è un esempio di metodi di Runge-Kutta.

$$u_0 = y_0$$

Per $i = 0, \dots, N-1$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_i, u_i) \\
K_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} K_2\right) \\
K_4 &= f(t_i + h, u_i + h K_3)
\end{aligned}$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

L'ordine di consistenza (e quindi di convergenza perché è zero-stabile) è 4.

Heun
$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_i, u_i) \\
K_2 &= f(t_i + h, u_i + h K_1)
\end{aligned}$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

Metodi a più passi (multi step)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad ??$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \qquad\qquad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Pi_{p-1}\, f(t,y(t))\,dt$$

$\uparrow$

Polinomio d'interpolazione nei nodi

$$t_i,\ t_{i-1},\ \dots\ t_{i-(p-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(t_{i-k}, y(t_{i-k})) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{p-1} \frac{t-t_{i-j}}{t_{i-k}-t_{i-j}}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(t_{i-k}, y(t_{i-k})) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{p-1} \frac{t-t_{i-j}}{t_{i-k}-t_{i-j}}\,dt =$$

$$t = t_i + s h \qquad s \in (0,1)$$

$$dt = h\, ds$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(t_{i-k}, y(t_{i-k}))\, h \underbrace{\int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{p-1} \frac{\cancel{t_i} + s\cancel{h} - (\cancel{t_i} - j\cancel{h})}{\cancel{t_i} - k\cancel{h} - (\cancel{t_i} - j\cancel{h})}\, ds}$$

$$\underbrace{\int_0^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{p-1} \frac{j+s}{j-k}\, ds}_{\beta_k}$$

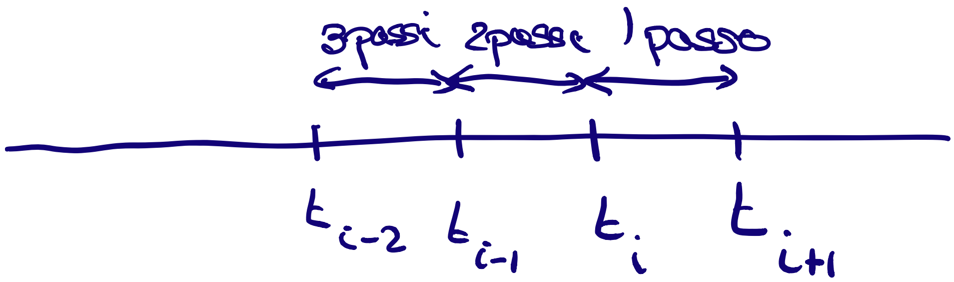
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \simeq h \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k f(t_{i-k}, y(t_{i-k}))$$

$$u_{i+1} = u_i + h \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k f(t_{i-k}, u_{i-k})$$

Metodo di Adams-Bashforth
a p-passi

Adams - Bashforth

- 2 passi $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left(3 f_i - f_{i-1}\right)$
- 3 passi $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12}\left(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}\right)$
- 4 passi $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right)$



$$f_p = f(t_p, u_p)$$ ← Notazione