Metodi di Runge-Kutta

9-12-2019

Sono metodi ad un passo quindi della forma

$$u_{n+1} = u_n + h\,\Phi_p(t_n, u_n; h)$$

$t_n = t_0 + nh \qquad h = \frac{T}{N} \qquad n = 0, \dots, N$

Abbiamo visto già due esempi:

* il metodo di Heun

$$K_1 = f(t_n, u_n)$$
$$K_2 = f(t_n + h, u_n + hK_1)$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

* il metodo RK4

$$K_1 = f(t_n, u_n)$$
$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$
$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$
$$K_4 = f(t_n + h, u_n + hK_3)$$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Il metodo di Heun è un metodo di Runge-Kutta a 2 stadi, RK4 è un metodo di Runge-Kutta a 4 stadi.

Il metodo di Heun ha ordine di consistenza 2, è zero-stabile e quindi ha ordine di convergenza 2.

Il metodo RK4 ha ordine di consistenza 4 è zero-stabile e quindi ha ordine di convergenza 4.

Non ci sono metodi di Runge-Kutta a s stadi di ordine s se $s \geq 5$.

Per avere un metodo di ordine 5 servono almeno 6 stadi.

Per avere un metodo di ordine 6 servono almeno 7 stadi.

Per avere un metodo di ordine 7 servono almeno 9 stadi.

Il generico metodo di Runge-Kutta a s stadi ha questa forma:

$$K_i = f\left(t_m + c_i h, u_m + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j\right) \qquad i = 1, \dots, s$$

$$u_{m+1} = u_m + h \sum_{j=1} b_j K_j$$

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

Matrice di Butcher

Si chiede che $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$

Per avere un metodo consistente dobbiamo chiedere $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$.

Un metodo di Runge-Kutta è esplicito se

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{se} \quad j \geq i$$

In un metodo di Runge-Kutta esplicito la matrice di Butcher ha questa forma:

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_2 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} \cdots & a_{ss-1} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
$$

$c_1 = 0 \Rightarrow K_1 = f(t_m, u_m)$

$c_2 = a_{21}$

Noi vediamo solo metodi di Runge-Kutta espliciti.

Derivazione dei metodi di Runge-Kutta espliciti a 2 stadi di ordine (di consistenza) 2.

$$u_{m+1} = u_m + h\,(b_1 K_1 + b_2 K_2)$$

$$K_1 = f(t_m, u_m) \qquad K_2 = f(t_m + c_2 h,\, u_m + h\, c_2 K_1)$$

$$\tau_{m+1}(h) = \frac{1}{h}\Big[y(t_{m+1}) - y(t_m) - h\big(b_1 f(t_m, y(t_m)) + b_2 f(t_m + c_2 h,\, y(t_m) + c_2 h f(t_m, y(t_m)))\big)\Big] = (*)$$

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))} \longleftarrow (*)$$

$$(*) = \frac{1}{h}\Big[y(t_{m+1}) - y(t_m) - h\big(b_1 y'(t_m) + b_2 \underbrace{f(t_m + c_2 h,\, y(t_m) + c_2 h y'(t_m))}\big)\Big]$$

$$y(t_m) + c_2 h y'(t_m) + O(h^2) = \underline{f(t_m + c_2 h,\, y(t_m + c_2 h))}$$

$$= \frac{1}{h}\left[y(t_{m+1}) - y(t_m) - h\Big(b_1 y'(t_m) + b_2 \underbrace{f(t_m + c_2 h, y(t_m + c_2 h))}_{\boxed{y'(t_m + c_2 h)}}\Big)\right] + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{h}\left[y(t_{m+1}) - y(t_m) - h\Big(b_1 y'(t_m) + b_2\, y'(t_m + c_2 h)\Big)\right] + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{h}\Big[\cancel{y(t_m)} + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) - \cancel{y(t_m)}$$
$$- h\Big(b_1 y'(t_m) + b_2 \big(y'(t_m) + c_2 h y''(t_m)\big)\Big)\Big] + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{h}\left[h y'(t_m)(1 - b_1 - b_2) + h^2 y''(t_m)\left(\frac{1}{2} - c_2 b_2\right)\right] + O(h^2)$$

Per avere un metodo consistente deve essere

$$b_1 + b_2 = 1$$

Per avere un metodo di ordine 2 serve anche

$$c_2 b_2 = \frac{1}{2}$$

Nel metodo di Heun $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ e abbiamo $c_2 = 1$.

Un'altra scelta possibile è $b_1 = 0$ $b_2 = 1$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Questo è il metodo di Eulero modificato

$$K_1 = f(t_m, u_m)$$
$$K_2 = f\left(t_m + \frac{h}{2}, u_m + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$u_{m+1} = u_m + h K_2$$

Assoluta stabilità

Si riferisce al comportamento della soluzione approssimata "quando $t \longrightarrow \infty$"

$$u_n \simeq y(t_n) = y(t_0 + nh)$$

cioè quando $n \longrightarrow \infty$.

Problema modello

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t > 0 \qquad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

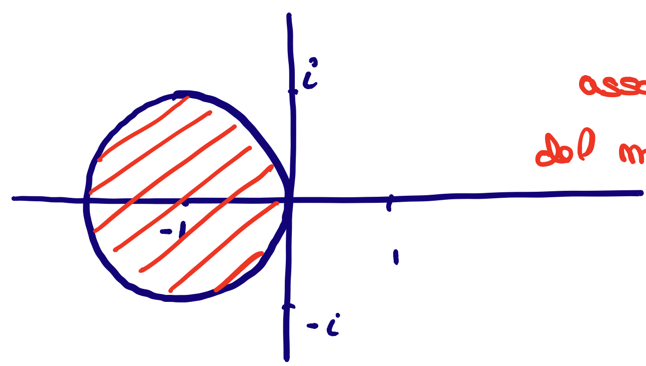
$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}\lambda \, t} \left[\cos(\mathrm{Im}\lambda \, t) + i \sin(\mathrm{Im}\lambda \, t)\right]$$

Se $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ allora $|y(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Proviamo ad approssimare la soluzione del problema (*) usando il metodo di Eulero

$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n = (1+h\lambda)u_n$$
$$= (1+h\lambda)^{n+1} u_0 = (1+h\lambda)^{n+1}$$

$|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ se e solo se $|1+h\lambda| < 1$, cioè se il numero complesso $z = h\lambda$ si trova all'interno del disco di raggio 1 centrato in -1



Regione di assoluta stabilità del metodo di Eulero.

Assoluta stabilità per il metodo di Crank-Nicolson.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(\lambda u_n + \lambda u_{n+1})$$

$$\left(1-\frac{h}{2}\lambda\right)u_{n+1} = \left(1+\frac{h}{2}\lambda\right)u_n$$

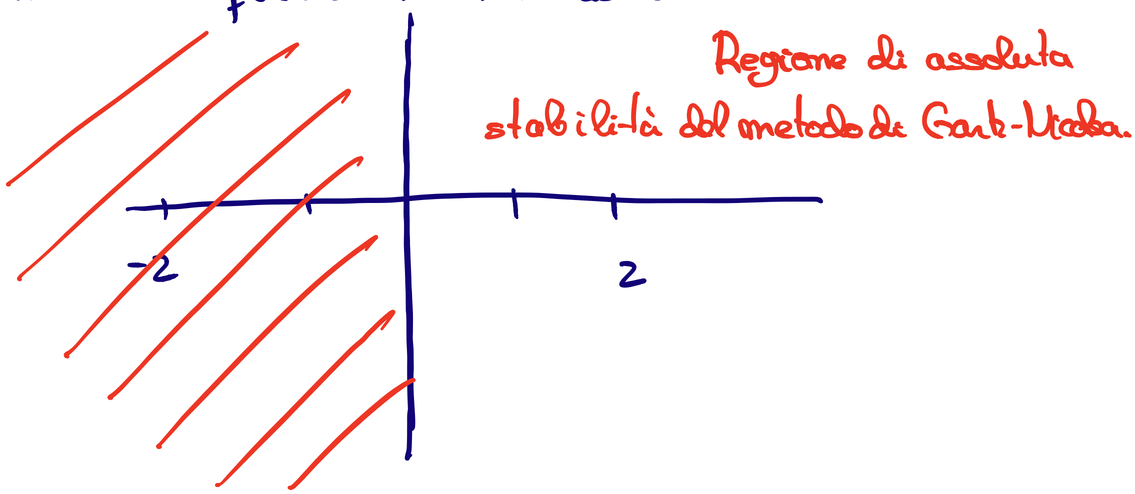
$$u_{n+1} = \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\,u_n = \left(\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right)^{n+1}$$

$$u_n = \left(\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right)^n$$

$$|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{se e solo se} \quad \left|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}\right| < 1$$

$$|2+h\lambda| < |2-h\lambda|$$

quando il numero complesso $z = h\lambda$ dista da -2 meno di quello che dista da 2.



Assoluta stabilità del metodo di Eulero implicito

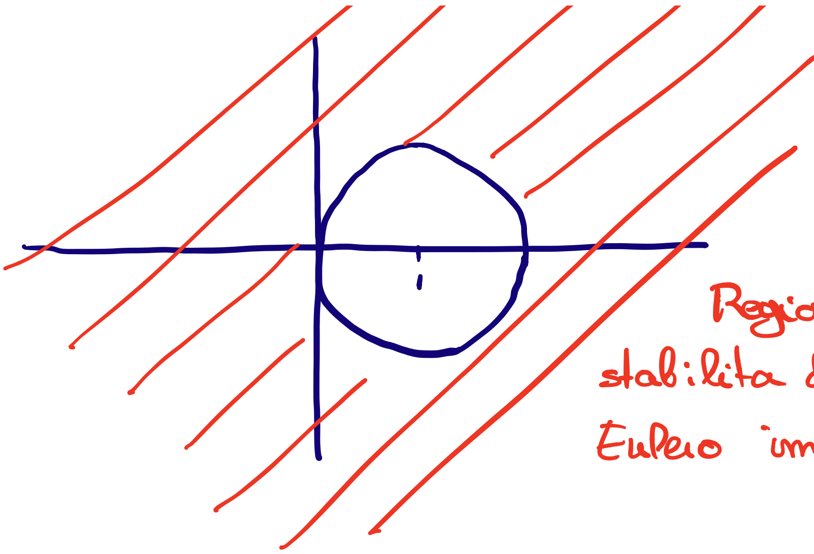
$$u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$$

$$(1-h\lambda)\, u_{n+1} = u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}\, u_n = \frac{1}{(1-h\lambda)^{n+1}}$$

$$|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{se e solo se} \quad |1-h\lambda| > 1$$

quando il numero complesso $z = h\lambda$ si trova fuori del disco di raggio 1 centrato in 1



Regione di assoluta stabilità del metodo di Eulero implicito.

Studio della assoluta stabilità per i metodi a più passi

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{q} a_k u_{n-k} + h \sum_{k=-1}^{q} b_k \lambda u_{n-k}$$

$$\underbrace{u_{n+1} - \sum_{k=0}^{q} a_k u_{n-k}}_{\rho(z) \left(= z^{q+1} - \sum_{k=0}^{q} a_k z^{q-k}\right)} - h\lambda \underbrace{\sum_{k=-1}^{q} b_k u_{n-k}}_{\sigma(z) \left(= \sum_{k=-1}^{q} b_k z^{q-k}\right)} = 0$$

$$\Pi_{h\lambda}(z) = \rho(z) - h\lambda\, \sigma(z)$$

L'assoluta stabilità dei metodi a più passi è equivalente alla "<u>condizione assoluta delle radici</u>": tutte le radici del polinomio $\Pi_{h\lambda}(z)$ hanno modulo < 1.