Equazioni differenziali ordinarie

metodi ad un passo

Ana Alonso

Dipartimento di Matematica - Università di Trento

29 ottobre - 6 dicembre 2019

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Eulero esplicito.

$$\begin{array}{l} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \quad u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) \end{array}$$

dove $h = T/n$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \dots, n$ e $u_i \approx y(t_i)$.

Euler

```
function [t,u]=euler(fun,t0,y0,T,n)
h=T/n;
t=[t0:h:t0+T];
u(1)=y0;
for i=1:n
    K=fun(t(i),u(i));
    u(i+1)=u(i)+h*K;
end
```

Verifica dell'ordine di convergenza

Sia

$$e(h) := \max_{i=0,\dots,n} |y(t_i) - u_i| \,.$$

Se $e(h) = O(h^p)$ allora

$$e(h/2) \approx \frac{e(h)}{2^p}$$

quindi

$$2^p \approx \frac{e(h)}{e(h/2)}$$

e

$$p \approx \frac{\log[e(h)] - log[e(h/2)]}{\log 2} \,.$$

Esercizio

Scrivere uno script di Matlab che

- approssimi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -t^2 y & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  usando il metodo di Eulero esplicito;
- verifichi esperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo;
- faccia il grafico della soluzione approssimata e della soluzione esatta $y(t) = \exp(-t^3/3)$.

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Heun:

$$\begin{aligned}
&u_0 = y_0 \\
&\text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\
&\quad K_1 = f(t_i, u_i) \\
&\quad K_2 = f(t_i + h, u_i + hK_1) \\
&\quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)
\end{aligned}$$

dove $h = T/n$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \ldots, n$.

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo Runge-Kutta 4:

$$\begin{array}{l} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \quad K_1 = f(t_i, u_i) \\ \quad K_2 = f(t_i + h/2, u_i + h/2 K_1) \\ \quad K_3 = f(t_i + h/2, u_i + h/2 K_2) \\ \quad K_4 = f(t_i + h, u_i + h K_3) \\ \quad u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{array}$$

dove $h = T/n$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \ldots, n$.