Equazioni differenziali ordinarie

metodi a più passi

Ana Alonso

Dipartimento di Matematica - Università di Trento

13 dicembre 2019

Esercizio

Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Adams-Bashforth a quattro passi:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \quad i = 3, \ldots, n-1$$

dove $h = T/n$, $t_i = t_0 + ih$ e $f_i = f(t_i, u_i)$ per $i = 0, \ldots, n$.

Fare $u_0 = y_0$ e per calcolare u_1, u_2 e u_3 usare

- il metodo di Heun;
- il metodo Runge-Kutta 4.

In entrambi i casi stimare numericamente l'ordine di convergenza.

Adams-Bashforth 4 passi

```
function [t,u]=AB4(fun,t0,y0,T,n)
h=T/n;
t=[t0:h:t0+T];
u(1)=y0;
for i=1:3
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    K1=f(i);
    K2=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K1);
    K3=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K2);
    K4=fun(t(i)+h,u(i)+h*K3);
    u(i+1)=u(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
for i=4:n
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    u(i+1)=u(i)+h/24*(55*f(i)-59*f(i-1)+37*f(i-2)-9*f(i-3));
end
```

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo predictor-corrector

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_0 \\
& \text{for } i = 2, \ldots, N-1 \\
& \quad u^*_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{12}(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}) \\
& \quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{24}(9 f^*_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2})
\end{aligned}
$$

per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}
$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$, $f_i = f(t_i, u_i)$ e $f^*_{i+1} = f(t_{i+1}, u^*_{i+1})$.

Predictor-corrector

```
function [t,u]=PC3(fun,t0,y0,T,N)
h=T/N;
t=t0:h:t0+T;
u=zeros(1,N+1);
f=zeros(1,N+1);
u(1)=y0;
for i=1:2
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    K1=f(i);
    K2=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K1);
    K3=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K2);
    K4=fun(t(i)+h,u(i)+h*K3);
    u(i+1)=u(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
for i=3:N
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    uaux=u(i)+h/12*(23*f(i)-16*f(i-1)+5*f(i-2));
    faux=fun(t(i+1),uaux);
    u(i+1)=u(i)+h/24*(9*faux+19*f(i)-5*f(i-1)+f(i-2));
end
```

Predictor-corrector

Oppure eliminando le variabili `uaux` e `faux`

```
function [t,u]=PC3n(fun,t0,y0,T,N)
h=T/N;
t=t0:h:t0+T;
u=zeros(1,N+1);
f=zeros(1,N+1);
u(1)=y0;
for i=1:2
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    K1=f(i);
    K2=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K1);
    K3=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K2);
    K4=fun(t(i)+h,u(i)+h*K3);
    u(i+1)=u(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
for i=3:N
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    u(i+1)=u(i)+h/12*(23*f(i)-16*f(i-1)+5*f(i-2));
    f(i+1)=fun(t(i+1),u(i+1));
    u(i+1)=u(i)+h/24*(9*f(i+1)+19*f(i)-5*f(i-1)+f(i-2));
end
```

Esercizio

- Modificare il metodo predictor-corrector precedente in modo di usare Adams-Bashforth a due passi

$$u_{i+1}^* = u_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

come metodo predictor e verificare di nuovo l'ordine di convergenza del metodo risultante.

Predictor-corrector

```
function [t,u]=PC32(fun,t0,y0,T,N)
h=T/N;
t=t0:h:t0+T;
u=zeros(1,N+1);
f=zeros(1,N+1);
u(1)=y0;
for i=1:2
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    K1=f(i);
    K2=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K1);
    K3=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K2);
    K4=fun(t(i)+h,u(i)+h*K3);
    u(i+1)=u(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
for i=3:N
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    u(i+1)=u(i)+h/2*(3*f(i)-f(i-1));
    f(i+1)=fun(t(i+1),u(i+1));
    u(i+1)=u(i)+h/24*(9*f(i+1)+19*f(i)-5*f(i-1)+f(i-2));
end
```

Predictor-corrector

L'ordine di convergenza risulta essere 3.

Per avere un metodo predictor-corrector di ordine 4 usando il metodo di Adams-Bashforth a due passi (metodo di ordine 2) come predictor e il metodo di Adams-Moulton a tre passi (metodo di ordine 4) come corrector dobbiamo correggere due volte (K=2).

Predictor-corrector

```
function [t,u]=PC32n(fun,t0,y0,T,N)
h=T/N;
t=t0:h:t0+T;
u=zeros(1,N+1);
f=zeros(1,N+1);
u(1)=y0;
for i=1:2
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    K1=f(i);
    K2=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K1);
    K3=fun(t(i)+h/2,u(i)+h/2*K2);
    K4=fun(t(i)+h,u(i)+h*K3);
    u(i+1)=u(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
for i=3:N
    f(i)=fun(t(i),u(i));
    u(i+1)=u(i)+h/2*(3*f(i)-f(i-1));
    for k=1:2
        f(i+1)=fun(t(i+1),u(i+1));
        u(i+1)=u(i)+h/24*(9*f(i+1)+19*f(i)-5*f(i-1)+f(i-2));
    end
end
```

Esercizio

Scrivere uno script di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t^2\, y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- usando il metodo di Eulero implicito.

$$\begin{array}{l} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \quad u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}) \end{array}$$

- usando il metodo di Crank-Nicolson.

$$\begin{array}{l} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}))\,. \end{array}$$

Assoluta stabilità

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t) = -5y(t) \quad t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

usando

- il metodo di Eulero esplicito: $u_{i+1} = u_i + h\, f(t_i, u_i)$;
- il metodo di Crank-Nicolson:
  $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$;
- il metodo del punto medio: $u_{i+1} = u_{i-1} + 2h\, f(t_i, u_i)$.

Provare con $h = 0.5$, $h = 0.4$, $h = 0.1$, $h = 0.0001$.
Come si comporta il metodo del punto medio se $t \in [0, 1]$?

Assoluta stabilità

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'(t) = 9y_1(t) + 24y_2(t) + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t & y_1(0) = \frac{4}{3} \\ y_2'(t) = -24y_1(t) - 51y_2(t) - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t & y_2(t) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

usando il metodo di Runge-Kutta di ordine 4.
Confrontare i risultati ottenuti con $h = 0.1$ e $h = 0.05$ sapendo che la soluzione esatta è

$$y_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t$$
$$y_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t$$