Analisi Numerica I
Equazioni non lineari

Ana Alonso

ana.alonso@unitn.it

27 settembre - 4 ottobre 2019

Risoluzione di equazioni non lineari

Il comando `fzero`

- `x=fzero(fun,x0)` *"tries to find a zero of fun near x0"*.
- `x0` può essere un scalare o un vettore di due componenti.
- Se `x0` e un vettore di due componenti `fzero` assume che `x0` è un intervallo e che il segno di `fun(x0(1))` e diverso del segno di `fun(x0(2))`. Se non è cosi da errore.
- L'algoritmo che usa è una combinazione del metodo di bisezione, il metodo delle secanti e tecniche di interpolazione.
- `fun` è una funzione scritta in Matlab. Più precisamente e un *"function handle"*.

"Function handle"

Per trovare una soluzione vicina ad 1 dell'equazione $x^2 - 2 = 0$

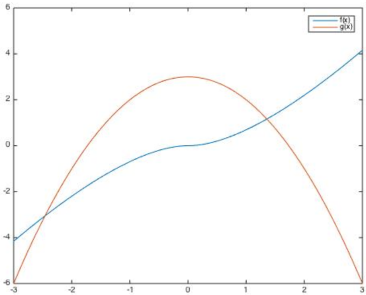
```
>> fzero(@(x) x.^2-2,1)
ans =
1.4142
```

oppure

```
>> fun=@(x) x.^2-2;
>> fzero(@fun,1)
ans =
1.4142
```

Esercizio

Si considerino le funzioni $f(x) = x\log(|x|+1)$ e $g(x) = 3 - x^2$. Scrivere uno script di Matlab che disegni il grafico delle due funzioni nell'intervallo $(-3, 3)$ e calcoli i punti di intersezione.



(22 giugno 2018.)

Soluzione

```
f=@(x) x.*log(abs(x)+1);
g=@(x) 3-x.^2;
xx=linspace(-3,3);
plot(xx,f(xx),xx,g(xx))
legend('f(x)','g(x)')
h=@(x) g(x)-f(x);
P=fzero(h,-3)
Q=fzero(h,3)
```

Il metodo di Newton

$x^{(0)}$ assegnato

for $k \geq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

if $\quad |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < toll \quad$ STOP

Il metodo di Newton

$x^{(0)}$ assegnato

for $k \geq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

if $\quad |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < toll \quad$ STOP

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Newton.

Il metodo di Newton

$$
\begin{aligned}
& x^{(0)} \text{ assegnato} \\
& \text{for } k \geq 0 \\
& \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \\
& \quad \text{if } \quad |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < toll \quad \text{STOP}
\end{aligned}
$$

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Newton.

```
function [x,nit]=newton(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
for nit=1:nmax
    inc=fun(x)/dfun(x);
    x=x-inc;
    if abs(inc)<toll, return, end
end
```

Il test d'arresto

$x^{(0)}$ assegnato
for $k \geq 0$
$\quad x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$

$\quad$ if $\quad |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < toll \quad$ STOP

- Nei metodi di punto fisso l'incremento $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$ e il residuo $\|\Phi(x^{(k)}) - x^{(k)}\|$ coincidono.
- Se $|\Phi'(\xi_k)| << 1$ allora l'incremento è una buona stima dell'errore.

$$x^{(k)} - \alpha = x^{(k)} - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - \alpha = x^{(k)} - x^{(k+1)} + \Phi(x^{(k)}) - \Phi(\alpha)$$

$$= x^{(k)} - x^{(k+1)} + \Phi'(\xi_k)(x^{(k)} - \alpha)\,.$$

$$(1 - |\Phi'(\xi_k)|)\|x^{(k)} - \alpha\| \leq \|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|$$

Nel metodo di Newton $\Phi'(\alpha) = 0$.

Esercizio

Usando la funzione newton risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \qquad \text{e} \qquad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0\,.$$

Che cosa si osserva sulla velocità di convergenza?

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo

La successione $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ converge ad α con ordine p se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = K$$

e $K > 0$.
Per k sufficientemente grande risulta essere

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \approx K|x^{(k)} - \alpha|^p$$

ma anche

$$|x^{(k+2)} - \alpha| \approx K|x^{(k+1)} - \alpha|^p\,.$$

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo

- Faccendo il rapporto

$$\frac{|x^{(k+2)} - \alpha|}{|x^{(k+1)} - \alpha|} \approx \left(\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} \right)^p$$

Chiamando $R_k = \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|}$ abbiamo

$$R_{k+1} \approx R_k^p\ .$$

- Calcolando il logaritmo

$$\log R_{k+1} \approx p \log R_k$$

- Quindi

$$p \approx \frac{\log R_{k+1}}{\log R_k}\ .$$

Esercizio

La seguente funzione di matlab stima l'ordine di convergenza di una successione convergente.

```
function p=ordine(v)
err=abs(v-v(end));
R=err(2:end)./err(1:end-1);
p=log(R(2:end-1))./log(R(1:end-2));
```

Confrontare l'ordine di convergenza del metodo di Newton nel risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \qquad \text{e} \qquad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0\,.$$

Soluzione

Dobbiamo modificare la funzione newton in modo di avere anche la successione di tutte le iterate.

```
function [x,nit,xv]=newtonb(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
xv=[x];
for nit=1:nmax
    inc=fun(x)/dfun(x);
    x=x-inc;
    xv=[xv x];
    if abs(inc)<toll, return, end
end
```

Soluzione

```
>> f1=@(x) x-exp(-x);
>> df1=@(x) 1+exp(-x);
>> f2=@(x) (f1(x))^2;
>> df2=@(x) 2*f1(x)*df1(x);
>> [x,n1,v1]=newtonb(f1,df1,1);
>> [x,n2,v2]=newtonb(f2,df2,1);
>> p1=ordine(v1)
p1 =
    1.9421    2.0017    1.6709
>> p2=ordine(v2)
p2 =
  Columns 1 through 6
    0.9539    0.9759    0.9878    0.9939    0.9969...
```

Esercizio

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo delle secanti

$$x^{(-1)},\, x^{(0)} \quad \text{assegnati}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}\, f(x^{(k)}) \quad \text{per } k \geq 0\,.$$

Fermare le iterazioni quando $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < 1.e-10$.

Il metodo delle secanti

```
function [x,nit,xv]=secanti(fun,x0,x)
nmax=1000;
toll=1.e-10;
xv=[x0,x];
fx0=fun(x0);
for nit=1:nmax
    fx=fun(x);
    inc=(x0-x)/(fx0-fx)*fx;
    x0=x;
    fx0=fx;
    x=x-inc;
    xv=[xv,x];
    if abs(inc)<toll, return, end
end
```