Integrazione numerica

Ana Alonso

Dipartimento di Matematica - Università di Trento

22 Novembre 2019

Formule di quadratura

Esempi di formule di quadratura di Newton-Cotes:

- Formula del punto medio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Formula del trapezio: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.
- Formula di Simpson:
  $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$.

Esempio di formula di quadratura di Gauss:

- Formula a due punti: $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
  (Per approssimare $\int_a^b f(x)\,dx$ fare il cambiamento di variabile $x = \frac{a+b}{2} + s\frac{b-a}{2}$.)

Formule di quadratura composite

Si decompone l'intervallo d'integrazione in N sottointervalli di uguale ampieza e si usa una formula di quadratura (la stessa) in ogni sottointervallo.
$H = \frac{b-a}{N}$, $P_i = a + iH$ per $i = 0, 1, \ldots, N$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{P_{i-1}}^{P_i} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} \frac{H}{2}(f(P_{i-1}) + f(P_i)) \quad \text{(trapezi)}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} \frac{H}{6}\left(f(P_{i-1}) + 4f\left(\frac{P_{i-1}+P_i}{2}\right) + f(P_i)\right) \quad \text{(Simpson)}$$

Nodi della formula di quadratura

$$x_i = a + ih\,, \quad i = 0, 1, \ldots, M\,, \quad h = \frac{b-a}{M}\,.$$

- Formula del trapezio con N sottointervalli: $M = N$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(x_i) + f(x_N)\right]\,.$$

- Formula di Cavalieri-Simpson con N sottointervalli: $M = 2N$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{H}{6}\sum_{i=1}^{N}\left[f(P_{i-1}) + 4f\left(\frac{P_{i-1}+P_i}{2}\right) + f(P_i)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + f(x_{2N})\right]\,.$$

Esercizio

Scrivere due funzioni di Matlab che approssimino

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

usando le formule composite con N sottointervalli

- dei trapezi,
- di Simpson.

Esercizio

- ```
  function q=trapezi(fun,a,b,N)
  H=(b-a)/N;
  x=[a:H:b];
  fx=fun(x);
  q=H*(fx(1)/2+sum(fx(2:end-1))+fx(end)/2);
  ```
- ```
  function q=simpson(fun,a,b,N)
  H=(b-a)/N;
  x=[a:H/2:b];
  fx=fun(x);
  q=H/6*(fx(1)+4*sum(fx(2:2:end-1))+2*sum(fx(3:2:end-2))+fx(end));
  ```

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della seguente formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b)\right]$$

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi la forma composita della formula di Gauss a due punti

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Il comando integral

Il comando di Matlab `Q = integral(fun,a,b)` approssima l'integrale della funzione `fun` da `a` a `b` usando una formula di quadratura adattiva.

"Attempts to satisfy $|Q - I| <= max(AbsTol, RelTol * |Q|)$*, where I denotes the exact value of the integral. Usually RelTol determines the accuracy of the integration. However, if* $|Q|$ *is sufficiently small, AbsTol determines the accuracy of the integration, instead. The default value of AbsTol is 1.e-10, and the default value of RelTol is 1.e-6."*

Stima a posteriori dell'errore - I

Formula di Simpson composita: errore con passo h

$$I(f) - I_h^S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(iv)}(\zeta)$$

Errore con passo $h/2$

$$I(f) - I_{h/2}^S = -\frac{b-a}{180} (h/2)^4 f^{(iv)}(\widehat{\zeta})$$

Quindi

$$I(f) - I_h^S \approx 2^4 \left[I(f) - I_{h/2}^S \right]$$

se $f^{(iv)}(\zeta) \approx f^{(iv)}(\widehat{\zeta})$.

Stima a posteriori dell'errore - II

Stima dell'errore usando $|I^S_{h/2} - I^S_h|$:

$$I(f) - I^S_h = I(f) - I^S_{h/2} + I^S_{h/2} - I^S_h \,.$$

$$2^4 \left[I(f) - I^S_{h/2} \right] \approx I(f) - I^S_{h/2} + I^S_{h/2} - I^S_h \,.$$

$$(2^4 - 1) \left[I(f) - I^S_{h/2} \right] \approx I^S_{h/2} - I^S_h$$

$$|I(f) - I^S_{h/2}| \approx \frac{1}{2^4 - 1} |I^S_{h/2} - I^S_h| \,.$$

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

con errore stimato minore di `toll` usando la formula di Simpson.

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

con errore stimato minore di `toll` usando la formula di Simpson.

```
function [q,n]=simpsontoll(fun,a,b,toll)
imax=20;
qold=simpson(fun,a,b,1);
n=2;
K=1/2;
toll=K*toll;
for i=1:imax
  q=simpson(fun,a,b,n);
  err=abs(q-qold)/15;
  if err < toll, return, end
  qold=q;
  n=2*n;
end
```

Esercizi

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

con errore stimato minore di `toll` usando la formula dei trapezi.

Algoritmi di integrazione adattivi

Si cerca un'approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$ con errore minore di una prefissata tolleranza `tol` dividendo l'intervallo d'integrazione in sottointervalli non uniformi .

- Se $[c,d] \subset [a,b]$ cerco di approssimare $\int_c^d f(x)\,dx$ con errore minore di $\frac{d-c}{b-a}$ `toll`.
- Serve una funzione che approssimi $\int_c^d f(x)\,dx$ e fornisca anche una stima dell'errore.
- La seguente funzione lo fa usando il metodo di Simpson composito con due sottointervalli

```
function [q,err]=fquad(fun,c,d);
H=(d-c)/2;
x=[c:H/2:d];
fx=fun(x);
qold=H/3*(fx(1)+4*fx(3)+fx(5));
q=H/6*(fx(1)+4*fx(2)+2*fx(3)+4*fx(4)+fx(5));
err=abs(q-qold)/15;
```

Algoritmi di integrazione adattivi

```
Iapp=0
c=a; d=b;
while c~=b
  [q,err]=fquad(fun,c,d)
  if err < (d-c)/(b-a) * toll
    Iapp=Iapp+q;
    c=d; d=b;
  else
    d=(c+d)/2;
  end
end
```

Algoritmi di integrazione adattivi

```
function [Iapp,n,v]=simpsonadatt(fun,a,b,toll)
c=a; d=b;
Iapp=0;
v=c;
K=1/2;
toll=K*toll;
while c~=b;
  [q,err]=fquad(fun,c,d);
  if err< toll*(d-c)/(b-a),
    Iapp=Iapp+q;
    c=d; d=b;
    v=[v,c];
  else
    d=(c+d)/2;
  end
end
n=length(v)-1;
```