Metodi a più passi. Esempi

- Metodo del punto medio

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt \\ &= y(t_{n-1}) + 2hf(t_n, y(t_n)) + O(h^3) \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hf(t_n, u_n)$$

- Metodo di Simpson

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt$$

$$= y(t_{n-1}) + \frac{2h}{6}\left[f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + 4f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right] + O(h^5)$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{h}{3}\left[f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))\right]$$

Metodi a più passi

- Un metodo si dice a q passi ($q \geq 1$) se u_{n+1} dipende da u_{n+1-q} ma non da valori di u_k per $k < n+1-q$.
- Per innescare un metodo a più passi servono q condizioni iniziali.
  Poichè il problema di Cauchy ne fornisce una sola, per assegnare le condizioni mancanti si utilizzano metodi espliciti ad un passo di ordine elevato.
- Un generico metodo a $p+1$ passi è della forma

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p} b_j f(t_{n-j}, u_{n-j}) + h b_{-1} f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

Se $b_{-1} \neq 0$ lo schema è implicito

Metodi a più passi

Per un metodo a più passi, l'errore di troncamento locale è definito da

$$\tau_{n+1}(h) := \frac{1}{h}\left[y(t_{n+1}) - \sum_{j=0}^{p} a_j y(t_{n-j}) - h\sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, y(t_{n-j}))\right]$$

e l'errore di troncamento globale è definito da

$$\tau(h) = \max_{p\le n\le N} |\tau_n(h)|$$

Come per i metodi a un passo, un metodo a più passi si dice consistente se

$$\tau(h) \to 0 \quad \text{per} \quad h \to 0$$

Metodi a più passi

Dato il metodo a $p+1$ passi

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, u_{n-j}) & n = p, \dots, N-1 \\ u_n = w_n & n = 0, \dots p \end{cases}$$

consideriamo anche la successione data da

$$\begin{cases} z_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j z_{n-j} + h \left[\sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, z_{n-j}) + \delta_{n+1} \right] & n = p, \dots, N-1 \\ z_n = w_n + \delta_n & n = 0, \dots p \end{cases}$$

Il metodo si dice stabile se esiste $h_0 > 0$ e una costante $C > 0$ tali che per ogni $h \in (0, h_0]$

$$|z_n - u_n| \leq C\epsilon \quad \text{per} \quad 0 \leq n \leq N$$

se $|\delta_n| < \epsilon$ per $0 \leq n \leq N$.

Metodi a più passi

Sia

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{n-j}, u_{n-j})$$

un metodo multistep e sia

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j} .$$

Il metodo multistep soddisfa la condizione delle radici se tutte le radici di $\rho(r)$ sono contenute nel cerchio unità centrato nell'origine e le radici che si trovano sul bordo sono radici semplici.

Per un metodo multistep consistente la condizione delle radici è equivalente alla stabilità.

$$\text{Stabilità} + \text{consistenza} \Rightarrow \text{convergenza}$$

(se l'errore sui dati iniziali tende a zero per h che tende a zero.)

I metodi di Adams

Sia $(\Pi_p f)(t)$ il polinomio di grado p che interpola la funzione $f(t, y(t))$ in $p+1$ punti.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\Pi_p f)(t)\,dt$$

- Se i nodi di interpolazione sono $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-p}$ lo schema è esplicito e si ha un metodo di Adams-Bashforth.
- Se i nodi sono $t_{n+1}, t_n, \ldots, t_{n+1-p}$ lo schema è implicito e si ha un metodo di Adams-Moulton.

Metodi di Adams-Bashforth

- Per $p = 0$ (metodo ad un passo)

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n, y(t_n))\, dt$$

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) \rightsquigarrow \text{Eulero esplicito}$$

- Per $p = 1$ (metodo a due passi)

$$(\Pi_1 f)(t) = f(t_n, y(t_n))\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$

Metodi di Adams-Moulton

- Per $p = 0$ (metodo ad un passo)

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\, dt$$

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \rightsquigarrow \text{Eulero implicito}$$

- Per $p = 1$ (metodo ad un passo)

$$(\Pi_1 f)(t) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + f(t_n, y(t_n))\frac{t - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, u_{n+1}) + f(t_n, u_n)\right] \rightsquigarrow \text{Crank-Nicolson}$$

- Per $p = 2$ (metodo a due passi)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}\left[5f(t_{n+1}, u_{n+1}) + 8f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$

I metodi di Adams

- Per i metodi di Adams a q passi $\rho(r) = r^q - r^{q-1}$ quindi le radici sono $r_0 = 1$ e $r_1 = 0$ con moltiplicità $q - 1$. Sono pertanto metodi stabili.
- In generale i metodi di Adams-Bashforth a q passi sono consistenti di ordine q e i metodi di Adams-Moulton a q passi di ordine $q + 1$.

I metodi predictor-corrector

- La risoluzione di un problema di Cauchy non lineare con un metodo implicito richiede la risoluzione di una equazione non lineare.
- Ad esempi usando il metodo di Crank-Nicolson

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, u_{n+1}) + f(t_n, u_n)\right]$$

$$u_{n+1} = \Psi(u_{n+1})$$

- Per risolvere questa equazione si può usare una iterazione di punto fisso della forma

$$u_{n+1}^{(k+1)} = \Psi(u_{n+1}^{(k)})\,.$$

I metodi predictor-corrector

- La condizione di convergenza di questo metodo di punto fisso comporta una limitazione sul passo di discretizzazione.
- Bisogna fornire anche un buon dato iniziale $u_{n+1}^{(0)}$. Questo può essere fatto usando un metodo multistep esplicito.
- Per contenere il costo computazionale si itera poi per un numero fissato m di iterazioni.
- In questo modo il metodo implicito correge il valore di u_{n+1} "predetto" dallo schema multistep esplicito.
- il metodo che si ottiene è detto metodo predictor-corrector.

I metodi predictor-corrector. Esempio

$$\text{Predictor} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$$

$$\text{Corrector} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$$

$f_m := f(t_m, u_m)$, $f_m^{(k)} := f(t_m, u_m^{(k)})$

$$\text{(P)} \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(1)} + \frac{h}{2}(3f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)})$$

$$\text{(E)} \quad f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$$

$$\text{(C)} \quad u_{n+1}^{(1)} = u_n^{(1)} + \frac{h}{12}(5f_{n+1}^{(0)} + 8f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)})$$

$$\text{(E)} \quad f_{n+1}^{(1)} = f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(1)})$$

Questa procedura viene indicata come procedura PECE.

I metodi predictor-corrector. Esempio

Se lo schema predictor è di ordine k e lo schema corrector è di ordine k^* allora il metodo predictor-corrector PECE si comporta come un metodo di ordine $min(k^*, k+1)$.

In questo esempio il metodo predictor-corrector risulta essere di ordine 3:

- Adams-Bashforth a due passi $\rightsquigarrow$ predictor di ordine $k = 2$.
- Adams-Moulton a due passi $\rightsquigarrow$ corrector di ordine $k^* = 3$.

I metodi predictor-corrector. Esempio

Più economica è la procedura PEC:

$$\text{(P)} \quad u_{n+1}^{(0)} = u_n^{(1)} + \tfrac{h}{2}(3f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(0)})$$

$$\text{(E)} \quad f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, u_{n+1}^{(0)})$$

$$\text{(C)} \quad u_{n+1}^{(1)} = u_n^{(1)} + \tfrac{h}{12}(5f_{n+1}^{(0)} + 8f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(0)})$$

Metodi a più passi. Esercizi

- Verificare che il metodo di Adams-Bashforth

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$

  è consistente di ordine 2.
- Verificare che lo schema PECE che usa Eulero esplicito come metodo predictor e Crank-Nicolson come metodo corrector è il metodo di Heun.
- Verificare che il metodo a più passi

$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2h}{3}f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

  è convergente.