Metodi ad un passo espliciti

Sono metodi della forma

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f) \quad n = 0, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Esempi:

- metodi di Taylor
  - metodo di Eulero esplicito
  $$\Phi(t, u; h, f) = f(t, u)$$
  - metodo di Taylor di ordine 2
  $$\Phi(t, u; h, f) = f(t, u) + \frac{h}{2}\left[f_t(t, u) + f(t, u)\, f_y(t, u)\right]$$
- metodi di Runge-Kutta

Esempi di metodi Runge-Kutta

- Metodo di Heun

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

$$\Phi(t, u; h, f) = \frac{1}{2}\left[f(t, u) + f(t + h, u + hf(t, u))\right]$$

Si ottiene a partire del metodo di Crank-Nicolson sostituendo $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ con $f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))$ ovvero utilizzando il metodo di Eulero esplicito per approssimare u_{n+1}.

Esempi di metodi Runge-Kutta

- Metodo di Eulero modificato

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, f(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} f(t_n, u_n)) & n = 0, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

- Metodo Runge-Kutta di ordine 4 (RK4)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, u_n) \\ K_2 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, u_n + \tfrac{h}{2} K_1) \\ K_3 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, u_n + \tfrac{h}{2} K_2) \\ K_4 &= f(t_n + h, u_n + hK_3) \end{aligned}$$

Metodi ad un passo espliciti

Il metodo

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

si dice convergente se

$$\forall\, n = 0, \ldots, N \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

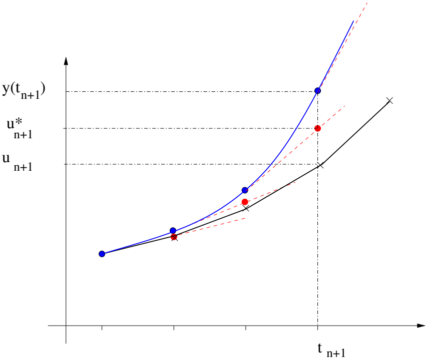
dove $C(h)$ è un infinitesimo rispetto ad h.

Se $C(h) = ch^p$ con c costante allora diremo che il metodo è convergente di ordine p.

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Definiamo $u^*_{n+1} := y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))$.



Convergenza del metodo di Eulero esplicito

Osserviamo che

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) = u^*_{n+1} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

quindi, se $M = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |y''(t)|$

$$|u^*_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq \frac{h^2}{2} M$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - u^*_{n+1}| &= |(u_n + h\, f(t_n, u_n)) - (y(t_n) + h\, f(t_n, y(t_n))| \\
&\leq |u_n - y(t_n)| + h|f(t_n, u_n) - f(t_n, y(t_n))| \\
&\leq |u_n - y(t_n)| + hL\, |u_n - y(t_n)| \\
&= (1 + hL)\, |u_n - y(t_n)|
\end{aligned}$$

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1} - y(t_{n+1})| &\leq |u_{n+1} - u^*_{n+1}| + |u^*_{n+1} - y(t_{n+1})| \\
&\leq (1 + hL)\,|u_n - y(t_n)| + \frac{h^2}{2} M
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1} - y(t_{n+1})| \\
&\leq (1 + hL)\left[(1 + hL)|u_{n-1} - y(t_{n-1})| + \frac{h^2}{2} M\right] + \frac{h^2}{2} M \\
&= (1 + hL)^2 |u_{n-1} - y(t_{n-1})| + \frac{h^2}{2} M\,[1 + (1 + hL)] \\
&= (1 + hL)^3 |u_{n-2} - y(t_{n-2})| + \frac{h^2}{2} M\left[1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2\right] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

Si ha pertanto

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1} - y(t_{n+1})| &\leq (1+hL)^{n+1}|u_0 - y(t_0)| + \frac{h^2}{2}M\sum_{j=0}^{n}(1+hL)^j \\
&= \frac{h^2}{2}M\frac{(1+hL)^{n+1}-1}{1+hL-1}
\end{aligned}
$$

se $u_0 = y_0 = y(t_0)$.

Osserviamo che $1+hL \leq e^{hL}$ quindi $(1+hL)^{n+1} \leq e^{hL(n+1)} \leq e^{TL}$. Per $0 \leq n \leq N-1$,

$$|u_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq \frac{hM}{2L}(e^{TL}-1) \to 0 \quad \text{se } h \to 0$$

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

Se si tiene conto degli errori di arrotondamento allora, i valori calcolati effettivamente sono $\widehat{u}_n$ tali che

$$\begin{cases} \widehat{u}_{n+1} = \widehat{u}_n + hf(x_n, \widehat{u}_n) + \zeta_{n+1} & n = 0, \dots, N-1 \\ \widehat{u}_0 = y_0 + \zeta_0 \end{cases}$$

quindi

$$|\widehat{u}_{n+1} - u^*_{n+1}| \leq (1 + hL)|\widehat{u}_n - y(t_n)| + |\zeta_{n+1}| \,.$$

Siccome $|u^*_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq \frac{h^2}{2} M$

$$|\widehat{u}_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq (1 + hL)|\widehat{u}_n - y(t_n)| + |\zeta_{n+1}| + \frac{h^2}{2} M$$

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

$$|\widehat{u}_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq (1 + hL)|\widehat{u}_n - y(t_n)| + |\zeta_{n+1}| + \frac{h^2}{2}M$$

$$\leq (1 + hL)^{n+1}|\widehat{u}_0 - y(t_0)| + \sum_{j=0}^{n} \left[(1 + hL)^j \left(|\zeta_{n-j+1}| + \frac{h^2}{2}M \right) \right]$$

$$\leq e^{TL}|\zeta_0| + \left(\zeta + \frac{h^2}{2}M \right) \frac{e^{TL} - 1}{hL}$$

dove $\zeta = \max_{1 \leq n \leq N-1} |\zeta_{n+1}|$.

Convergenza del metodo di Eulero esplicito

$$|\widehat{u}_{n+1} - y(t_{n+1})| \leq e^{TL} \left(|\zeta_0| + \frac{\zeta}{hL} + \frac{hM}{2L} \right)$$

- La presenza degli errori di arrotondamento fa comparire il termine $|\zeta_0| + \frac{\zeta}{hL}$ che non tende a zero per h che tende a zero.
- Esisterà un valore ottimo di h positivo, h^*, in corrispondenza del quale l'errore risulta minimo.
- Per $h < h^*$ l'errore di arrotondamento è preponderante sull'errore di troncamento.

Analisi dei metodi ad un passo espliciti

Consideriamo il metodo

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Si definisce l'errore di troncamento locale e si denota $\tau_{n+1}(h)$

$$\tau_{n+1}(h) := \frac{1}{h}\left[y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n); h, f)\right] \quad n = 0, \ldots, N-1\,.$$

L'errore di troncamento globale, $\tau(h)$ si definisce come

$$\tau(h) := \max_{0 \le n \le N-1} |\tau_{n+1}(h)|$$

(Osservare che N dipende di h, giaché $N = T/h$.)

Il metodo si dice consistente se $\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$.

Se $\tau(h) = O(h^p)$ si dice che il metodo è consistente di ordine p.

Analisi dei metodi ad un passo espliciti

Dato il metodo

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f) \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

sia z_n, $n = 0, \ldots, N$ la soluzione di

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h\,[\Phi(t_n, z_n; h, f) + \delta_{n+1}] \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ z_0 = y_0 + \delta_0\,. \end{cases}$$

Il metodo si dice stabile se esiste $h_0 > 0$ e una costante $C > 0$ tali che per ogni $h \in (0, h_0]$

$$|z_n - u_n| \le C \max_{0 \le k \le N} |\delta_k|$$

per ogni n, $0 \le n \le N$.

Analisi dei metodi ad un passo espliciti

Consideriamo il generico metodo esplicito ad un passo per la risoluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f) & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

Supponiamo che la funzione di incremento Φ sia lipschitziana di constante Λ rispetto al secondo argomento, uniformemente rispetto ad h e t; allora il metodo è stabile.

Analisi dei metodi ad un passo espliciti

Un metodo stabile e consistente è convergente.

Osserviamo che

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\left[\Phi(t_n, y(t_n); h, f) + \tau_{n+1}(h)\right] & n = 0, \dots, N-1 \\ y(t_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

La stabilità ci dice che per ogni n, $0 \leq n \leq N$

$$|y(t_n) - u_n| \leq C \max_{0 \leq k \leq n} |\tau_k(h)| = C\tau(h)$$

e la consistenza garantisce che

$$\tau(h) \to 0 \text{ per } h \to 0 \,.$$

Metodi di Runge-Kutta espliciti

Sono metodi ad un passo espliciti

$$u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f)$$

dove la funzione d'incremento è della forma

$$\Phi(t, y; h, f) = \sum_{i=1}^{s} b_i K_i$$

con

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t, y) \\ K_i &= f(t + c_i h, y + h \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} K_j) \quad \text{per } i > 1 \end{aligned}$$

In questo caso si dice che è un metodo di Runge-Kutta a s stadi.

Metodi di Runge-Kutta espliciti

Osserviamo che

$$y(t+h) = y(t) + h\Delta(t, y; h, f)$$

$$\Delta(t, y; h, f) := y'(t) + \frac{h}{2}y''(t) + \frac{h^2}{3!}y'''(t) + \dots$$

quindi

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= \frac{1}{h}\left[y(t_n+h) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n); h, f)\right] \\ &= \Delta(t_n, y(t_n); h, f) - \Phi(t_n, y(t_n); h, f)\,.\end{aligned}$$

Metodi di Runge-Kutta espliciti

- Nei metodi di Taylor Φ si ottiene troncando Δ.
  Nei metodi di Runge-Kutta i coefficienti si determinano in modo che lo sviluppo in serie di $\Phi(t_n, y(t_n); h, f)$ coincida con $\Delta(t_n, y(t_n); h, f)$ fino al termine di ordine h^p.
- Un metodo di Runge-Kutta esplicito a s stadi non può avere ordine maggiore di s.
- Non esistono metodi Runge-Kutta espliciti a s stadi con ordine s se $s \geq 5$.
- I metodi di Heun e di Eulero modificato sono metodi a due stadi di ordine 2.
- L'esempio che abbiamo visto di metodo di Runge-Kutta di ordine 4 è un metodo a 4 stadi.

Metodi di Runge-Kutta espliciti. Adattività del passo

Sia $u_{n+1} = u_n + h\,\Phi(t_n, u_n; h, f)$ un metodo di Runge-Kutta di ordine p.

Sia $\widetilde{\Phi}(t, y; h, f)$ la funzione d'incremento di un altro metodo di Runge-Kutta di ordine $p+1$ e sia $\widetilde{u}_{n+1} = u_n + h\,\widetilde{\Phi}(t_n, u_n; h, f)$.

Se $u_n \approx y(t_n)$ allora

$$\tau_n(h) \approx \frac{y(t_{n+1}) - u_{n+1}}{h} \quad \text{e} \quad \widetilde{\tau}_n(h) \approx \frac{y(t_{n+1}) - \widetilde{u}_{n+1}}{h}\,.$$

D'altra parte $\tau_n(h) = O(h^p)$ e $\widetilde{\tau}_n(h) = O(h^{p+1})$

$$\begin{aligned}\tau_n(h) &\approx \frac{y(t_{n+1})-u_{n+1}}{h} = \frac{y(t_{n+1})-\widetilde{u}_{n+1}}{h} + \frac{\widetilde{u}_{n+1}-u_{n+1}}{h} \\ &= \frac{\widetilde{u}_{n+1}-u_{n+1}}{h} + O(h^{p+1})\end{aligned}$$

Metodi di Runge-Kutta espliciti. Adattività del passo

$$\tau_n(h) \approx \frac{\widetilde{u}_{n+1} - u_{n+1}}{h}$$

- Si trata di usare questa stima per scegliere un passo appropriato h^* che garantisca che l'errore di troncamento locale rimane minore di una certa tolleranza ϵ prefissata.
- Si cerca il passo $h^* = qh$ che garantisca $\tau_n(h^*) < \epsilon$
- $\tau_n(qh) \approx q^p \, \tau_n(h) \approx q^p \, \frac{\widetilde{u}_{n+1} - u_{n+1}}{h} < \epsilon$

$$q < \left(\frac{\epsilon \, h}{|\widetilde{u}_{n+1} - u_{n+1}|} \right)^{1/p}$$

- Questo metodo tende a sottostimare l'errore. Si può prendere

$$q = \left(\frac{1}{2} \, \frac{\epsilon \, h}{|\widetilde{u}_{n+1} - u_{n+1}|} \right)^{1/p}$$

Metodi di Runge-Kutta espliciti. Adattività del passo

Uno degli schemi più noti di questa forma è il metodo di Runge-Kutta Fehlberg del quarto ordine.

- Usa due metodi di Runge-Kutta a 6 stadi: uno di ordine 4 e un altro di ordine 5.
- Questi due metodi sono tali che i coefficienti $a_{i,j}$ (e quindi i coefficienti c_i) sono gli stessi. I due metodi differiscono nei coefficenti b_i.

Esercizi

Dato el problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t\,, \quad t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

scrivere per questo esempio

- il metodo di Taylor di ordine 2,
- il metodo di Heun,
- il metodo di Eulero modificato,
- il metodo di Taylor di ordine 3.

Esercizi

Dato el problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2y}{t} & t \in [1, 2] \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

approssimare la soluzione nel punto $t = 2$ usando

- il metodo di Eulero esplicito,
- il metodo di Eulero modificato,

con passo $h = 0.25$.
Sapendo che la soluzione esatta è $y(t) = t^2$ calcolare in entrambi casi l'errore.