COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico - IV appello

15 gennaio 2009

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

b) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi.

c) Partendo da $x^{(0)} = [1,1,1]^T$ fare due iterazioni del metodo di Jacobi.

a) Metodo di Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-1}{2}\left[-3 - x_2^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[7 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left[1 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A non è a dominanza diagonale stretta (né per righe né per colonne)
Per studiare la convergenza del metodo di Jacobi calcolo gli autovalori di B_J.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -\lambda & 1/4 \\ -1 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{8} + \frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda}{8} = -\left(\lambda^3 + \frac{1}{8}\right)$$

Gli autovalori di B_J sono le tre radici cubiche (complesse) di $-\frac{1}{8}$ che hanno modulo $\frac{1}{2}$. Quindi $\rho(B_J) = \frac{1}{2} < 1$. Il metodo di Jacobi converge.

c) $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(-3-1) \\ \frac{1}{4}(7-1+1) \\ \frac{1}{2}(1-2+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left(-3-\frac{7}{4}\right) \\ \frac{1}{4}(7-2+0) \\ \frac{1}{2}\left(1-2\cdot 2+\frac{7}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{7-12}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Data l'equazione

$$x = 3 - 4x^3$$

a) dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (0,1),

b) usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.2,

c) usando il metodo di Newton e prendendo come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione, approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-2}.

a) $x = 3 - 4x^3 \iff 4x^3 + x - 3 = 0$

$f(x) = 4x^3 + x - 3$ è una funzione continua

$f(0) = -3 < 0$

$f(1) = 4 + 1 - 3 = 2 > 0$

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in (0,1) : f(\alpha) = 0$

b) $x^{(0)} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad |x^{(0)} - \alpha| < \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ (> 0.2)

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 3 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$x^{(1)} = \frac{1/2 + 1}{2} = \frac{3}{4}$ $\quad |x^{(1)} - \alpha| < \frac{1 - 1/2}{2} = \frac{1}{4}$ (> 0.2)

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 3 = \frac{27}{16} + \frac{12}{16} - 3 = \frac{39}{16} - 3 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$

$x^{(2)} = \frac{3/4 + 1}{2} = \frac{7}{8}$ $\quad |x^{(2)} - \alpha| < \frac{1 - 3/4}{2} = \frac{1}{8} < 0.2$ $\quad$ STOP

c) $x^{(0)} = \frac{7}{8}$ $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{4 {x^{(k)}}^3 + x^{(k)} - 3}{12 {x^{(k)}}^2 + 1}$

Mi fermo quando $\left| \dfrac{4 {x^{(k)}}^3 + x^{(k)} - 3}{12 {x^{(k)}}^2 + 1} \right| < 10^{-2}$

$$x^{(1)} = \frac{7}{8} - \frac{4 \frac{7^3}{8^3} + \frac{7}{8} - 3}{12 \frac{7^2}{8^2} + 1} = \frac{7}{8} - \frac{\frac{7^3 + 7 \cdot 16 - 3 \cdot 128}{128}}{\frac{24 \cdot 7^2 + 128}{128}} = \frac{7}{8} - \frac{71}{1304}$$

$= 0.875 - 0.054448 = 0.820552$

$|x^{(0)} - x^{(1)}| = 0.054448 > 10^{-2}$

$$x^{(2)} = 0.820552 - \frac{4 \cdot 0.820552^3 + 0.820552 - 3}{12 \cdot 0.820552^2 + 1} =$$

$$= 0.820552 - \frac{0.030481}{9.079667} = 0.820552 - 0.003357 = 0.817195$$

$|x^{(1)} - x^{(2)}| = 0.003357 < 10^{-2}$ $\quad$ STOP

Esercizio 3

Verificare che il metodo per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy a tre passi

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(5f_n - f_{n-2})$$

ha ordine di consistenza 2.

$$E_{m+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_{m+1}) - y(t_m) - \frac{h}{4}\left(5y'(t_m) - y'(t_{m-2})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[y(t_m) + hy'(t_m) + \frac{h^2}{2}y''(t_m) + \frac{h^3}{6}y'''(t_m)$$

$$-y(t_m)$$

$$-h\frac{5}{4}y'(t_n)$$

$$+h\frac{1}{4}\left(y'(t_m) - 2hy''(t_n) + \frac{(2h)^2}{2}y'''(t_n)\right)\Big] + O(h^3)$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{y(t_m)} - \cancel{y(t_n)} + hy'(t_n)\left(\cancel{1 - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}}\right) + h^2y''(t_n)\left(\cancel{\frac{1}{2} - \frac{2}{4}}\right) + h^3y'''(t_n)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\frac{4}{2}\right) + O(h^3)\right] =$$

$$= h^2y'''(t_n)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + O(h^3) = \frac{2}{3}h^2y'''(t_n) + O(h^3)$$

L'errore di troncamento è dell'ordine di h^2

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Runge-Kutta-Gill

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + (2-\sqrt{2})K_2 + (2+\sqrt{2})K_3 + K_4)$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, u_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}(\sqrt{2}-1)K_1 + \frac{h}{2}(2-\sqrt{2})K_2\right) \\
K_4 &= f\left(t_n + h, u_n - \frac{h}{2}\sqrt{2}K_2 + \frac{h}{2}(2+\sqrt{2})K_3\right),
\end{aligned}$$

per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

```
function [t,u] = RKG(fun, t0, y0, T, N)
h = T/N;
t = [t0:h:t0+T];
u(1) = y0;
for n = 1:N
    k1 = feval(fun, t(n), u(n));
    k2 = feval(fun, t(n)+h/2, u(n)+h/2*k1);
    k3 = feval(fun, t(n)+h/2, u(n)+h/2*(sqrt(2)-1)*k1+h/2*(2-sqrt(2))*k2);
    k4 = feval(fun, t(n)+h, u(n)-h/2*sqrt(2)*k2+h/2*(2+sqrt(2))*k3);
    u(n+1) = u(n) + h/6*(k1+(2-sqrt(2))*k2+(2+sqrt(2))*k3+k4);
end
```