COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Calcolo Numerico - II appello

18 luglio 2008

Esercizio 1

a) Verificare (senza fare la fattorizzazione) che esiste la fattorizzaione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè $A = LU$ con L matrice triangolare inferiore con elementi diagonali pari a uno e U matrice triangolare superiore.

b) Calcolare la fattorizzazione LU della matrice A.

a) La matrice A è simmetrica. Vediamo, usando il criterio di Sylvester, se è simmetrica definita positiva.

$2 > 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1+1-2-2-1 = 1 > 0$$

Quindi A è simmetrica definita positiva e pertanto esiste la fattorizzazione LU di A.

b) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad m_{21} = \frac{-1}{2} \quad m_{31} = \frac{1}{2} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & 2-\frac{-1}{2}(-1) & -1-\frac{-1}{2}1 \\ & -1-\frac{1}{2}(-1) & 1-\frac{1}{2}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad m_{32} = \frac{-1/2}{3/2} = \frac{-1}{3} \quad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ & & \frac{1}{2}-\frac{-1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{-1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4.9	3.1	1.1	-0.8	-2.9

a) Calcolare la forma di Newton del polinomio interpolatore.

b) Calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

a) Per calcolare la forma di Newton del polinomio interpolatore costruisco la tabella delle differenze divise

$$
\begin{array}{llllll}
-2 & 4.9 & & & & \\
-1 & 3.1 & \frac{3.1-4.9}{-1+2}=-1.8 & & & \\
0 & 1.1 & \frac{1.1-3.1}{0+1}=-2 & \frac{-2+1.8}{0+2}=-0.1 & & \\
1 & -0.8 & \frac{-0.8-1.1}{1-0}=-1.9 & \frac{-1.9+2}{1+1}=0.05 & \frac{0.05+0.1}{1+2}=0.05 & \\
2 & -2.9 & \frac{-2.9+0.8}{2-1}=-2.1 & \frac{-2.1+1.9}{2-0}=-0.1 & \frac{-0.1-0.05}{2+1}=-0.05 & \frac{-0.05-0.05}{2+2}=-0.025
\end{array}
$$

$$P_4(x)=4.9-1.8(x+2)-0.1(x+2)(x+1)+0.05(x+2)(x+1)x-0.025(x+2)(x+1)x(x-1)$$

b) Per calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $y=a_0+a_1x$; risolvo il sistema lineare.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} 1 & \sum_{i=0}^{4} x_i \\ \sum_{i=0}^{4} x_i & \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} y_i \\ \sum_{i=0}^{4} x_i y_i \end{bmatrix} \qquad \sum_{i=0}^{4} x_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 4+1+0+1+4=10$$

$$\sum_{i=0}^{4} y_i = 9.1-3.7=5.4 \qquad \sum_{i=0}^{4} x_i y_i = -9.8-3.1-0.8-5.8=-19.5$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 \\ -19.5 \end{bmatrix} \qquad a_0=\frac{5.4}{5}=1.08 \qquad a_1=\frac{-19.5}{10}=-1.95$$

Equazione della retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati $y=1.08-1.95x$

Esercizio 3

a) Determinare (a priori) il numero N di sottointervalli necessari per approssimare

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

con errore minore di 10^{-2} usando il metodo del punto medio.

b) Usare il metodo del punto medio per approssimare

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

con errore minore di 10^{-2}.

a) Formula dell'errore per il metodo del punto medio composito con N sottointervalli: $E_N^{PM}(f) = \frac{b-a}{24} H^2 f''(\xi)$ dove $\xi \in (a,b)$ e $H = \frac{b-a}{N}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2}, \quad f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+2)^2 - 2x\,2(x^2+2)\,2x}{(x^2+2)^4} = -\frac{2(x^2+2)-8x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$$

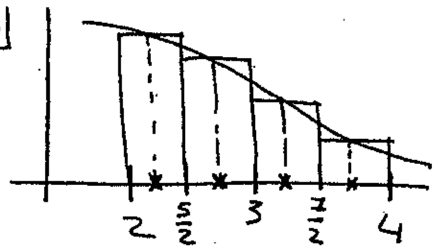
Nell'intervallo $[2,4]$ sia il numeratore che il denominatore di $f''(x)$ sono funzioni crescenti e positive. Quindi se $\xi \in [2,4]$

$$|f''(\xi)| \le \frac{6\cdot 4^2 - 4}{(2^2+2)^3} = \frac{92}{216} = \frac{23}{54}$$

$$\left|\int_2^4 \frac{1}{x^2+2}\,dx - I_N^{PM}(f)\right| = |E_N^{PM}(f)| \le \frac{2}{24}\left(\frac{2}{N}\right)^2 \frac{23}{54}, \text{ quindi } |E_N^{PM}(f)| \le 10^{-2}$$

se $\frac{8}{24N^2}\frac{23}{54} \le 10^{-2}$ $\quad \frac{23}{3\cdot 54}\,10^2 \le N^2$ $\quad N > 10\sqrt{\frac{23}{162}} = 3.768$ $\quad \boxed{N=4}$

b)



m_i	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{15}{4}$
f_i	$\frac{1}{\frac{81}{16}+2}$	$\frac{1}{\frac{121}{16}+2}$	$\frac{1}{\frac{169}{16}+2}$	$\frac{1}{\frac{225}{16}+2}$

m_i: punto medio dell'intervallo i-esimo

$$I_4^{PM}(f) = H\sum_{i=1}^{4} f(m_i) = \frac{2}{4}\left[f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)+f\left(\frac{13}{4}\right)+f\left(\frac{15}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16}{81+32}+\frac{16}{121+32}+\frac{16}{169+32}+\frac{16}{225+32}\right] = 0.194013$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Eulero implicito per l'approssimazione della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + t(t+1) & t \in [0, T] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Eulero implicito

$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1})$ $\quad \left(h = \frac{T}{N}\right)$

$u_0 = y(t_0)$.

In questo esempio $u_{n+1} = u_n + h\left[u_{n+1} + t_{n+1}(t_{n+1}+1)\right]$ quindi

$(1-h)\, u_{n+1} = u_n + h\, t_{n+1}(t_{n+1}+1)$

$u_{n+1} = \frac{1}{1-h}\left[u_n + h t_{n+1}(t_{n+1}+1)\right]$

$t_0 = 0$ e $y(t_0) = 0$.

```
function [t,u] = compito(T,N)
h= T/N;
t=[0:h:T];
u(1)=0;
for k=1:N
   u(k+1)=(u(k)+h*t(k+1)*(t(k+1)+1))/(1-h);
end
```