COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico - I appello

21 giugno 2008

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Scrivere la matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

b) Studiare la convergenza del metodo di Jacobi.

c) Partendo da $x^{(0)} = [1,1,1]^T$ fare due iterazioni del metodo di Jacobi.

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = D - N$ con $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$B_J = D^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$ matrice di iterazione del metodo di Jacobi:

b) A è una matrice a dominanza diagonale stretta per righe

$|-3| > 1 + |-1| = 2$

$2 > 0 + 1 = 1$

$3 > 1 + 1 = 2$

quindi il metodo di Jacobi converge.

c) $x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}\left[-4 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right]$

$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left[4 - x_3^{(k)}\right]$ $\qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left[8 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right]$

$x_1^{(1)} = -\frac{1}{3}\left[-4-1+1\right] = \frac{4}{3}$ $\qquad x_1^{(2)} = -\frac{1}{3}\left[-4 - \frac{3}{2} + 2\right] = \frac{-1}{3} \cdot \frac{-4-3}{2} = \frac{7}{6}$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left[4-1\right] = \frac{3}{2}$ $\qquad x_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left[4-2\right] = 1$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{3}\left[8-1-1\right] = 2$ $\qquad x_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left[8 - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{3}\left[8 - \frac{8+9}{6}\right] = \frac{48-17}{18} = \frac{31}{18}$

Esercizio 2

Usando il metodo di Newton approssimare la soluzione positiva di

$$\frac{x^2+2x}{x^2+1} = 1 - x^2$$

con errore stimato minore di 10^{-2}.

$$\frac{x^2+2x}{x^2+1} = 1-x^2 \iff x^2+2x = (1+x^2)(1-x^2) \iff x^2+2x = 1-x^4$$

$$\iff x^4+x^2+2x-1=0.$$

$f(x) = x^4+x^2+2x-1 \qquad f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = 1+1+2-1 = 3 > 0$

Esiste $\alpha \in [0,1]$ tale che $f(\alpha)=0$

Prendo $x^{(0)} = \frac{1}{2}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{{x^{(k)}}^4 + {x^{(k)}}^2 + 2x^{(k)} - 1}{4{x^{(k)}}^3 + 2x^{(k)} + 2}$$

$$x^{(1)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+1-1}{4\frac{1}{8}+1+2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{16}}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{56} = \frac{28-5}{56} = \frac{23}{56}$$

$$|x^{(0)} - x^{(1)}| = \frac{5}{56} = 0.089286 \geq 10^{-2}$$

$$x^{(2)} = \frac{23}{56} - \frac{\left(\frac{23}{56}\right)^4 + \left(\frac{23}{56}\right)^2 + 2\frac{23}{56} - 1}{4\left(\frac{23}{56}\right)^3 + 2\frac{23}{56} + 2} = \frac{23}{56} - 0.005993 = 0.404721$$

$$|x^{(1)} - x^{(2)}| = 0.005993 < 10^{-2} \quad \rightsquigarrow \quad \text{STOP}$$

$$\alpha \simeq 0.404721$$

Esercizio 3

a) Determinare (a priori) il numero N di sottointervalli necessari per approssimare

$$\int_1^2 \log(x^2+3x)\,dx$$

con errore minore di 10^{-2} usando il metodo dei trapezi.

b) Usare il metodo dei trapezi per approssimare

$$\int_1^2 \log(x^2+3x)\,dx$$

con errore minore di 10^{-2}.

a) $f(x) = \log(x^2+3x) \qquad f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x} \qquad f''(x) = \dfrac{2(x^2+3x)-(2x+3)^2}{(x^2+3x)^2}$

$$f''(x) = \frac{2x^2+6x-(4x^2+12x+9)}{(x^2+3x)^2} = -\frac{2x^2+6x+9}{(x^2+3x)^2}$$

Se $x \in [1,2]$ $\quad |f''(x)| = \dfrac{2x^2+6x+9}{(x^2+3x)^2} \leq \dfrac{2\cdot 2^2+6\cdot 2+9}{(1^2+3\cdot 1)^2} = \dfrac{29}{16}$

La formula dell'errore per la approssimazione di $\int_a^b f(x)\,dx$ con N sottointervalli è

$$E_N^{TC}(f) = -\frac{1}{12}(b-a)H^2 f''(\xi) \quad \text{con } H = \frac{b-a}{N} \text{ e } \xi \in [a,b]$$

In questo caso

$$|E_N^{TC}(f)| \leq \frac{1}{12}(2-1)\left(\frac{2-1}{N}\right)^2 \frac{29}{16} = \frac{1}{12}\,\frac{29}{16}\,\frac{1}{N^2} \leq 10^{-2} \text{ se}$$

$N \geq \dfrac{10}{4}\sqrt{\dfrac{29}{12}} = 3.8864$ quindi prendiamo $N=4$

b) $I_4^T(f) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}f(1) + f\left(\dfrac{5}{4}\right) + f\left(\dfrac{6}{4}\right) + f\left(\dfrac{7}{4}\right) + \dfrac{1}{2}f(2)\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}\log 4 + \log\left(\dfrac{25}{16}+\dfrac{15}{4}\right) + \log\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}\right) + \log\left(\dfrac{49}{16}+\dfrac{21}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\log 10\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}\log 4 + \log\dfrac{85}{16} + \log\dfrac{27}{4} + \log\dfrac{133}{16} + \dfrac{1}{2}\log 10\right] =$

$= 1.885451$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Heun per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_n + h, u_n + hf(t_n, u_n))\right].$$

```
function [t,u] = heun(fun, t0, y0, T, N)
h= T/N;
t =[t0 :h : t0+T];
u(1)=y0;
for  n=1:N
    k1= feval(fun, t(n), u(n));
    k2= feval (fun, t(n)+h, u(n)+h*k1);
    u(n+1)= u(n)+ h/2 *(k1+k2);
end
```