COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico - Appello straordinario

25 ottobre 2008

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Calcolare la fattorizzazione LU di A.

b) Usando la fattorizzazione LU di A risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $m_{21} = \frac{-4}{2} = -2$ $m_{31} = \frac{-2}{2} = -1$ $\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & -1-(-2)\cdot 1 & 4-(-2)(-1) \\ & 2-(-1)\cdot 1 & 4-(-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & 3 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $m_{32} = \frac{3}{1} = 3$ $\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & 3-3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & -3 \end{bmatrix} = U$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

b) $Ax = b \iff LUx = b$ $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$y_1 = -1$; $y_2 = 2 + 2y_1 = 2-2 = 0$

$y_3 = -2 + y_1 - 3y_2 = -2-1+0 = -3$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 1 & 2 \\ & & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

$x_3 = \frac{-3}{-3} = 1$

$x_2 = 0 - 2x_3 = -2$

$x_1 = \frac{1}{2}[-1 - x_2 + x_3] = \frac{1}{2}[-1+2+1] = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Calcolare il polinomio di grado 3 che interpola la funzione $f(x) = \frac{1}{x+1}$ in 4 punti equispaziati dell'intervallo $[1, 2]$ includendo gli estremi.

x_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
y_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\frac{4}{3}+1} = \frac{3}{7}$	$\frac{1}{\frac{5}{3}+1} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$

Calcolo la forma di Newton del polinomio interpolatore

$$
\begin{array}{llllll}
1 & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{4}{3} & \frac{3}{7} & \dfrac{\frac{3}{7}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = 3\,\frac{6-7}{14} = \frac{-3}{14} & & \\
\frac{5}{3} & \frac{3}{8} & \dfrac{\frac{3}{8}-\frac{3}{7}}{1/3} = 3\,\frac{21-24}{56} = \frac{-9}{56} & \dfrac{\frac{-9}{56}+\frac{3}{14}}{2/3} = \frac{3}{2}\,\frac{-9+12}{56} = \frac{9}{112} & \\
2 & \frac{1}{3} & \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{3}{8}}{1/3} = 3\,\frac{8-9}{24} = \frac{-1}{8} & \dfrac{-\frac{1}{8}+\frac{9}{56}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\,\frac{-7+9}{56} = \frac{3}{56} & \frac{3}{56}-\frac{9}{112} = \frac{6-9}{112} = \frac{-3}{112}
\end{array}
$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{14}(x-1) + \frac{9}{112}(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right) - \frac{3}{112}(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)$$

Esercizio 3

Approssimare

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx$$

usando il metodo di Cavalieri-Simpson composito con 4 sottointervalli. Dare una stima a posteriori dell'errore.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx = \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{x^3+2}\,dx + \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{x^3+2}\,dx + \int_{0}^{1/2} \frac{1}{x^3+2}\,dx + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx$$

In ogni sottointervallo uso la formula di Cavalieri Simpson

$$\simeq \frac{1/2}{6}\left[f(-1)+4f\left(\frac{-3}{4}\right)+f\left(\frac{-1}{2}\right)\right] + \frac{1/2}{6}\left[f\left(\frac{-1}{2}\right)+4f\left(\frac{-1}{4}\right)+f(0)\right]$$

$$+ \frac{1/2}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1/2}{6}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

x_i	-1	$\frac{-3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y_i	1	$\frac{1}{-\frac{27}{64}+2}=\frac{64}{101}$	$\frac{1}{\frac{-1}{8}+2}=\frac{8}{15}$	$\frac{1}{\frac{-1}{64}+2}=\frac{64}{127}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\frac{1}{64}+2}=\frac{64}{129}$	$\frac{1}{\frac{1}{8}+2}=\frac{8}{17}$	$\frac{1}{\frac{27}{64}+2}=\frac{64}{155}$	$\frac{1}{3}$

$$I_4^{CS} = \frac{1}{12}\left[1+4\cdot\frac{64}{101}+2\,\frac{8}{15}+4\,\frac{64}{127}+2\,\frac{1}{2}+4\,\frac{64}{129}+2\,\frac{8}{17}+4\,\frac{64}{155}+\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[1+\frac{256}{101}+\frac{16}{15}+\frac{256}{127}+1+\frac{256}{129}+\frac{16}{17}+\frac{256}{155}+\frac{1}{3}\right] = 1.043974$$

Per dare una stima a posteriori dell'errore serve anche l'integrale approssimato con $\frac{4}{2}=2$ sottointervalli

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3+2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx \simeq \frac{1}{6}\left[f(-1)+4f\left(\frac{-1}{2}\right)+f(0)\right] + \frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$$

$$I_2^{CS} = \frac{1}{6}\left[1+4\,\frac{8}{15}+2\,\frac{1}{2}+4\,\frac{8}{17}+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{6}\left[1+\frac{32}{15}+1+\frac{32}{17}+\frac{1}{3}\right] = 1.058170$$

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3+2}\,dx - I_4^{CS}\right| \simeq \frac{|I_4^{CS}-I_2^{CS}|}{2^4-1} = \frac{1}{15}\,|1.043974-1.058170| = 0.000946$$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Adams-Bashforth a due passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Usare il metodo di Eulero esplicito per calcolare la condizione iniziale mancante.

Metodo di Adams-Bashforth a due passi:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right]$$
$$u_0 = y_0$$
u_1 da determinarsi

```
function [t,u] = AB2(fun, t0, y0, T, N)

h = T/N;
t = [t0 : h : t0+T]
u(1) = y0;
f(1) = feval(fun, t(1), u(1));
u(2) = u(1) + h * f(1);          % Eulero esplicito
for m = 2:N
    f(m) = feval(fun, t(m), u(m));
    u(m+1) = u(m) + h/2 * (3*f(m) - f(m-1));

end
```