Approssimazione polinomiale di funzioni e dati

Approssimare una funzione f significa trovare una funzione $\widetilde{f}$ di forma più semplice che possa essere usata al posto di f.

- Questa strategia è utilizzata nell'integrazione numerica in cui invece di calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ si calcola $\int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx$ dove $\widetilde{f}$ è, ad esempio, un polinomio.
- In altri contesti possiamo avere una funzione f nota solo in determinati punti. In questo caso la determinazione di $\widetilde{f}$ consentirà di approssimare con una funzione nota esplicitamente l'andamento della "legge" f che ha generato i dati.

Interpolazione polinomiale

Date $n+1$ coppie di valori $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ cerchiamo un polinomio di grado n, $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$ tale che

$$\Pi_n(x_i) = y_i\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

I punti x_i si dicono nodi d'interpolazione.

Teorema Dati $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ e i corrispondenti valori $y_0, \ldots, y_n$ esiste un unico polinomio $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$ tale che $\Pi_n(x_i) = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$.

Interpolazione polinomiale

Dimostrazione

Unicità: se ci fossero due polinomi $\Pi_n, \widehat{\Pi}_n \in \mathbb{P}_n$ tali che

$$\Pi_n(x_i) = \widehat{\Pi}_n(x_i) = y_i$$

allora la differenza $\Pi_n - \widehat{\Pi}_n \in \mathbb{P}_n$ e ha almeno $n+1$ radici diverse perché

$$(\Pi_n - \widehat{\Pi}_n)(x_i) = 0 \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che

$$\Pi_n - \widehat{\Pi}_n \equiv 0\,.$$

Interpolazione polinomiale

Dimostrazione

Esistenza: costruiremo il polinomio interpolatore.

Consideriamo i polinomi (di grado n) $l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

(ricordiamo che per ipotesi $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$.)

Chiaramente $l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ quindi

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

è un polinomio di grado n che interpola i dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$.

Interpolazione polinomiale

Un altro modo per costruire il polinomio interpolatore

$$\Pi(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

è risolvere il sistema lineare di $n+1$ equazioni con $n+1$ incognite $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = y_i \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ & & \vdots & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Interpolazione polinomiale

- La matrice di questo sistema si dice matrice di Vandermonde del vettore $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
- Il suo determinante è

$$\prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

che è diverso da zero se i nodi d'interpolazione sono distinti.
- In generale tende ad essere mal condizionata.

Errore di interpolazione

Se i dati sono della forma

$$\left\{(x_i, f(x_i))\right\}_{i=0}^{n}$$

per una funzione f assegnata, allora chiamaremo $\Pi_n f$ il polinomio iterpolatore.

Vogliamo adesso stimare $f(x) - \Pi_n f(x)$.

Teorema Dati $n+1$ nodi distinti $x_0, \ldots, x_n$ e un'altro punto x appartenenti al dominio di definizione di una funzione f. Sia I_x il più piccolo intervallo che contiene questi $n+2$ punti. Supponiamo che $f \in C^{n+1}(I_x)$. Allora esiste un punto $\xi \in I_x$ tale che

$$f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\,.$$

Errore di interpolazione

Se i nodi sono equispaziati $x_i = x_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, n$ e $x \in [x_0, x_n]$ si può dimostrare che

$$\left| \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \right| \leq n! \frac{h^{n+1}}{4}$$

quindi per ogni $x \in [x_0, x_n]$

$$|f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)| \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} .$$

Se stiamo lavorando in un intervallo $[a, b]$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ e $h = (b - a)/n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} = 0$$

ma questo non garantisce che $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ tenda a zero per $n \to \infty$.

Controesempio di Runge

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad -5 \leq x \leq 5$$

e il suo polinomio interpolatore in $n+1$ nodi equispaziati $\Pi_n f(x)$. Disegnado il grafico della funzione f e dei polinomi interpolatori per diversi valori di n si osserva che per certi punti $x \in [-5, 5]$

$$\lim_{n \to \infty} |f(x) - \Pi_n f(x)| \neq 0 \,.$$

Il fenomeno è più marcato agli estremi dell'intervallo.

- Questo fenomeno è legato alla scelta di nodi equispaziati.
- Scegliendo opportune distribuzioni dei nodi si può avere convergenza uniforme dei polinomi interpolatori alla funzione.

Controesempio di Runge

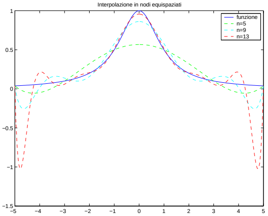


Grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dei polinomi interpolatori di grado 5, 9 e 13 in nodi equispaziati dell'intervallo $[-5, 5]$.

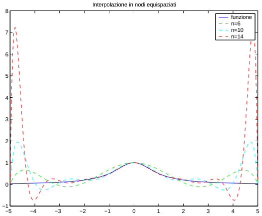
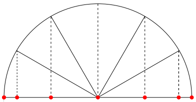


Grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dei polinomi interpolatori di grado 6, 10 e 14 in nodi equispaziati dell'intervallo $[-5, 5]$.

Controesempio di Runge

Nodi di Chebyshev nell'intervallo $[-1, 1]$

$$\hat{x}_i = \cos\left(i\frac{\pi}{n}\right) \qquad i = 0, \dots, n\,.$$



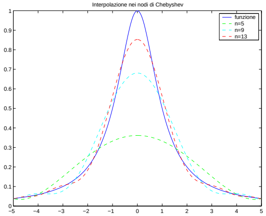
Nodi di Chebyshev nell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{x}_i\,.$$

Interpolando nei nodi di Chebyshev, se f è continua

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|\right) = 0\,.$$

Controesempio di Runge



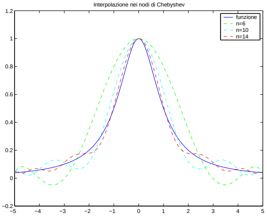


Grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dei polinomi interpolatori di grado 5, 9 e 13 nei nodi di Chebyshev dell'intervallo $[-5, 5]$.

Grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e dei polinomi interpolatori di grado 6, 10 e 14 nei nodi di Chebyshev dell'intervallo $[-5, 5]$.