# Equazioni non lineari

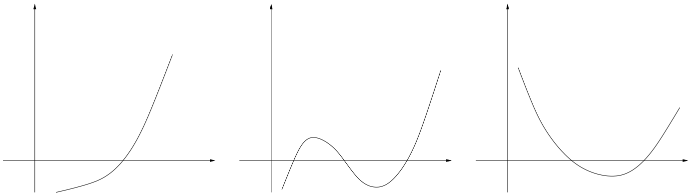
Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si cerca $\alpha \in [a, b]$ tale che

$$f(\alpha) = 0\,.$$

I metodi numerici per la risoluzione di questo problema sono metodi iterativi.

Teorema Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e tale che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $\alpha \in (a, b)$ tale che $f(\alpha) = 0$.

- La soluzione può non essere unica.
- La soluzione può esistere anche se $f(a)f(b) > 0$.



# Il metodo di bisezione

A partire da $I_0 = [a, b]$ costruisce una successione di sottointervalli $I_k = [a^{(k)}, b^{(k)}]$ con:

- $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$,
- $I_{k+1} \subset I_k$,
- $b^{(k+1)} - a^{(k+1)} = \frac{1}{2}(b^{(k)} - a^{(k)})$.

# Il metodo di bisezione

Si pone $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$.

Per $k \geq 0$ si pone $x^{(k+1)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$.

- Se $f(x^{(k+1)}) = 0 \quad \rightsquigarrow$ STOP.
- Se $f(a^{(k)})f(x^{(k+1)}) < 0 \rightsquigarrow a^{(k+1)}) = a^{(k)}, b^{(k+1)} = x^{(k+1)}$.
- Se $f(a^{(k)})f(x^{(k+1)}) > 0 \rightsquigarrow a^{(k+1)}) = x^{(k+1)}, b^{(k+1)} = b^{(k)}$.

Ad ogni iterazione si ha

$$|\alpha - x^{(k+1)}| < \frac{b^{(k)} - a^{(k)}}{2} = \frac{b^{(k-1)} - a^{(k-1)}}{2^2} = \cdots = \frac{b-a}{2^{k+1}} \to 0$$

per $k \to \infty$.

# Il metodo di bisezione

$$|\alpha - x^{(k+1)}| < \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

Per avere $\quad |\alpha - x^{(k)}| < \epsilon \quad \rightsquigarrow \quad k > \dfrac{\log((b-a)/\epsilon)}{\log(2)}\,.$

Esempio: $b - a = 1\,,\ \epsilon = 10^{-6}$

$$k > \frac{6}{\log_{10} 2} = 6\log_2 10 \approx 6 \cdot 3.32 = 19.92\,.$$

Per guadagnare una cifra significativa

$$b^{(k)} - a^{(k)} < \frac{1}{10}(b-a)\,, \quad \frac{1}{2^k}(b-a) < \frac{1}{10}(b-a)$$

$$10 < 2^k\,, \quad k > \log_2 10 \approx 3.32$$

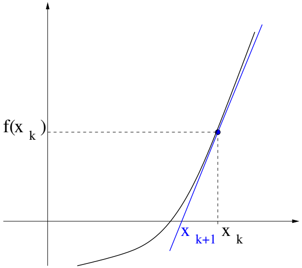
# Il metodo di Newton

Supponiamo che $f$ è derivabile in un generico punto $x^{(k)}$.
Scriviamo l'equazione della retta tangente a $f$ in tale punto:

$$y(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})\,.$$

Cerchiamo $x^{(k+1)}$ tale che $y(x^{(k+1)}) = 0$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}\,, \text{ purché } f'(x^{(k)}) \neq 0\,.$$



# Il metodo di Newton

Teorema Sia $f \in C^2([a,b])$. Se $\alpha \in [a,b]$ è tale che $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x^{(0)} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ il metodo di Newton genera una succession $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ che converge ad $\alpha$

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha \,.$$

# Il metodo di Newton

$$f(\alpha) = 0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(\alpha - x^{(k)})^2$$

$\xi \in I$ intervallo di estremi $\alpha$ e $x^{(k)}$.

$$\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} + (\alpha - x^{(k)}) = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x^{(k)})}(\alpha - x^{(k)})^2$$

$$\alpha - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x^{(k)})}(\alpha - x^{(k)})^2$$

$$\frac{\alpha - x^{(k+1)}}{(\alpha - x^{(k)})^2} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x^{(k)})}$$

purché $f'(x^{(k)}) \neq 0$.

# Il metodo di Newton

Se $f'(\alpha) \neq 0$

$$\frac{\alpha - x^{(k+1)}}{(\alpha - x^{(k)})^2} \to -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \text{ per } k \to \infty$$

L'errore al passo $k+1$ è proporzionale al quadrato dell'errore al passo $k$. Si dice che il metodo di Newton ha una convergenza del secondo ordine.
Se $f'(\alpha) = 0$ il metodo di Newton converge ancora ma la convergenza è lineare.

Esempio $f(x) = x^2$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{[x^{(k)}]^2}{2x^{(k)}} = \frac{x^{(k)}}{2}$$

# Il metodo di Newton

Vedremo che se la radice ha moltiplicità $m$ maggiore di 1 si può modificare il metodo di Newton per ricuperare l'ordine di convergenza 2.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}\,,\ \text{purché } f'(x^{(k)}) \neq 0\,.$$

Ciò presuppone di conoscere $m$.

# Il metodo di Newton

Quando fermare il metodo di Newton? Idealmente

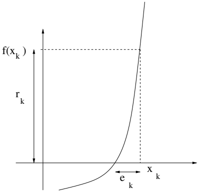
$$|x^{(k+1)} - \alpha| < \epsilon \quad \rightsquigarrow \ \texttt{STOP}$$

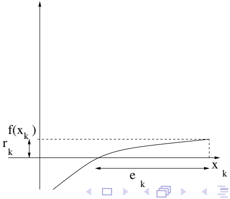
Vedremo che un buon stimatore dell'errore per il metodo di Newton è l'incremento. Ci si arresta quando

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon\,.$$

Per un metodo generico per il calcolo degli zeri un criterio alternativo può essere basato sul residuo

$$|r^{(k)}| = |f(x^{(k)})| < \epsilon \quad \rightsquigarrow \ \texttt{STOP}$$



# Il metodo delle secanti

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

Assegnati due valori iniziali $x^{(-1)}$ e $x^{(0)}$ per $k \geq 0$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$$

Il risultato di convergenza è analogo a quello che si ha per il metodo di Newton.

L'ordine di convergenza è intermedio tra 1 e 2 in concreto è $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

# Iterazioni di punto fisso

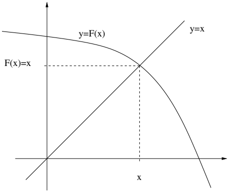
È sempre possibile trasformare il problema

$$\text{“trovare } \alpha \text{ tale che } f(\alpha) = 0\text{”}$$

in un problema equivalente della forma

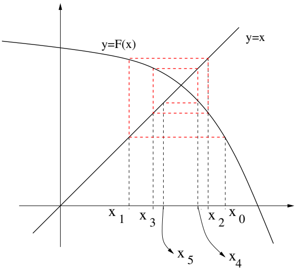
$$\text{“trovare } \alpha \text{ tale che } \alpha = \Phi(\alpha)\text{”}$$

(Ad esempio basta definire $\Phi(x) = x + f(x)$ ma non è l'unica scelta possibile)



# Iterazioni di punto fisso

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ assegnato} \\ x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) \end{cases}$$




Teorema Se la funzione $\Phi$ è tale che

- $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$.
- $\Phi \in C^1([a, b])$
- $\exists\, K < 1 \; : \; |\Phi'(x)| \leq K \quad \forall\, x \in [a, b]$.

allora $\Phi$ ha un unico punto fisso $\alpha \in [a, b]$, e per ogni scelta di $x^{(0)} \in [a, b]$ la successione $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge ad $\alpha$.

# Iterazioni di punto fisso

Ordine di convergenza.

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - \alpha &= \Phi(x^{(k)}) - \Phi(\alpha) \\ &= (x^{(k)} - \alpha)\Phi'(\xi) \\ &= (x^{(k)} - \alpha)\Phi'(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x^{(k)} - \alpha)^2\Phi''(\zeta) \end{aligned}$$

$\xi\,,\zeta \in I$ intervallo di estremi $\alpha$ e $x^{(k)}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \Phi'(\alpha)\,.$$

Se $\Phi'(\alpha) = 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\Phi''(\alpha)\,.$$

# Iterazioni di punto fisso

Un risultato di convergenza locale

Teorema Sia $\alpha$ un punto fisso di una funzione $\Phi$ continua e derivabile in un intorno di $\alpha$. Se $|\Phi'(\alpha)| < 1$, allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni ogni scelta di $x^{(0)} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ la successione $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge ad $\alpha$.

Siccome $x^{(k+1)} - \alpha = (x^{(k)} - \alpha)\Phi'(\xi)$ con $\xi \in I$ intervallo di estremi $\alpha$ e $x^{(k)}$, se $|\Phi'(\alpha)| > 1$ si ha $|\Phi'| > 1$ in un intorno di $\alpha$ e allora

$$|x^{(k+1)} - \alpha| > |x^{(k)} - \alpha| \,.$$

La convergenza non è possibile.

# Iterazioni di punto fisso

Il metodo di Newton è un metodo di punto fisso.

$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Phi'(x) := 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Quindi se $f'(\alpha) \neq 0$, $\Phi'(\alpha) = 0$.

Se $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ con $g(\alpha) \neq 0$, $\Phi'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} < 1$.

Se $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ e $\Psi(x) := x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$ allora $\Psi'(\alpha) = 0$.

# Iterazioni di punto fisso

Quando fermare un metodo di punto fisso?

$$\begin{aligned} \alpha - x^{(k)} &= \alpha - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ &= \Phi(\alpha) - \Phi(x^{(k)}) + x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ &= \Phi'(\xi)(\alpha - x^{(k)}) + x^{(k+1)} - x^{(k)} \end{aligned}$$

$\xi \in I$ intervallo di estremi $\alpha$ e $x^{(k)}$.

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq |\Phi'(\xi)||\alpha - x^{(k)}| + |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

Assumendo $|\Phi'(\xi)| < 1$

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq \frac{1}{1 - |\Phi'(\xi)|}|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

Se $\Phi'(\alpha) = 0$ l'incremento è un buon stimatore dell'errore.

# Esercizi

- Data l'equazione
$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0$$
  - dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (2,3),
  - usando il metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore minore di 0.2,
  - usando il metodo di Newton e tomando come valore iniziale l'approssimazione calcolata col metodo della bisezione approssimare la soluzione con errore stimato minore di $10^{-4}$.
- Approssimare $\sqrt[3]{17}$ con errore stimato minore di $10^{-4}$.

# Esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti metodi di punto fisso per l'approssimazione della soluzione dell'equazione

$$x + \log x = 0.$$

- $x^{(k+1)} = -\log x^{(k)}$;
- $x^{(k+1)} = e^{-x^{(k)}}$;
- $x^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x^{(k)} + e^{-x^{(k)}})$;
- $x^{(k+1)} = \frac{x^{(k)}(1-\log x^{(k)})}{x^{(k)}+1}$.

# Sistemi di equazioni non lineari

Data $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, trovare $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

$$\begin{cases} F_1(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \\ F_2(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 & = & 0 \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

# Sistemi di equazioni non lineari - Metodo di Newton

Sia $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ la matrice Jacobiana associata a $\mathbf{F}$ valutata nel punto $\mathbf{x}$.

$$\left(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\right)_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \ldots$ fino a convergenza

- calcolare $\mathbf{z}^{(k)}$, soluzione del sistema lineare

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}^{(k)})\, \mathbf{z}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- aggiornare

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{z}^{(k)}\,.$$

# Esercizi

Scrivere uno script di Matlab che implementi il metodo di Newton per l'approssimazione di una soluzione del sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 & = & 0 \\ (x-2)^2 + (y-0.5)^2 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

```
n=0
inc=1
x=[1;0]
while (inc > 1.e-8 & n < 30)
  n=n+1
  M=[2*x(1) -1; 2*(x(1)-2) 2*(x(2)-0.5)];
  F=[x(1)^2 -x(2)-1; (x(1)-2)^2+(x(2)-0.5)^2-1];
  delta=-M\F;
  inc=norm(delta)
  x=x+delta
end
```