Calcolo Numerico

Dare una risposta numerica a un problema matematico usando un calcolatore.

- La risposta non sempre (quasi mai) sarà esatta.
- Per approssimare la soluzione di un determinato problema matematico vi possono essere diversi algoritmi.
- La scelta di un determinato algoritmo per un determinato problema si basa su un'analisi del problema e sul confronto di diversi algoritmi in base al costo e all'accuratezza.

Sorgenti di errore

- Errori dovuti al modello.
- Errori nei dati.
- Errori di troncamento. Nel modello numerico le operazioni di passaggio al limite vengono "fermate" dopo un numero finito di passi.
- Errori di arrotondamento.

Rappresentazione dei numeri sul calcolatore

- Ogni operazione al calcolatore è affetta da errori di arrotondamento dovuti al fatto che su un calcolatore può essere rappresentato solo un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$.
- Fissata una base β, una quantità massima di cifre t e un intervallo di esponenti interi possibile $[L, U]$ (di solito $L < 0 < U$) posso rappresentare tutti i numeri della forma

  $$x = \pm\, 0.a_1 a_2 \cdots a_t\ \beta^e$$

  con $L \leq e \leq U$ e per da 1 a t, $a_r \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_r \leq \beta - 1$. Se $x \neq 0$ allora $a_1 \neq 0$.
- Questa è la rappresentazione in virgola mobile o floating point di x.
- Il numero intero $a_1 a_2 \cdots a_t$ si dice mantissa.

Rappresentazione dei numeri sul calcolatore

$$\begin{array}{rcl}
37492.3898764 & = & 0.374923898764\ 10^5 \\
\frac{4}{3} = 1.333333\ldots & = & 0.1333333\ldots\ 10^1 \\
-0.0004 & = & -0.4\ 10^{-3} \\
\pi = 3.141592\ldots & = & 0.3141592\ldots\ 10^1 \\
-0.777777\ldots & = & -0.777777\ldots\ 10^0 \\
100000000000 & = & 0.1\ 10^{12}
\end{array}$$

$$\pm\, 0.a_1 a_2 \cdots a_t\, \beta^e \quad L \leq e \leq U$$

L'insieme di tutti i numeri di questo tipo si chiama insieme di numeri-macchina con t cifre significative, base β e range $[L, U]$.

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$$

Se $\beta = 10$, $t = 6$, $L = -9$ e $U = 9$ solo -0.0004 è un numero macchina.

Arrotondamento di un numero reale

Se $x \in \mathbb{R}$

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \dots \ \beta^e \quad \rightsquigarrow \quad fl(x) = \pm 0.a_1 a_2 \dots \hat{a}_t \ \beta^e$$

$$\hat{a}_t = \begin{cases} a_t & \text{se } 0 \leq a_{t+1} < \beta/2 \\ a_t + 1 & \text{se } \beta/2 \leq a_{t+1} < \beta \end{cases}$$

$fl(0.374923898764\,10^5) = 0.37492\mathbf{4}\ 10^5$
$fl(\frac{4}{3}) = 0.133333\ 10^1$
$fl(-0.4\,10^{-3}) = -0.400000\ 10^{-3}$
$fl(\pi) = 0.314159\ 10^1$
$fl(-0.777777\dots) = -0.77777\mathbf{8}\ 10^0$
$fl(100000000000) \rightsquigarrow$ overflow

Proprietà dei numeri macchina

- `realmax` e `realmin`. $\rightsquigarrow$ Overflow e underflow.
  `realmax`$=0.999999\ 10^9$,
  `realmin`$=\ 0.100000\ 10^{-9}$.
- $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \dfrac{1}{2}\beta^{1-t} \rightsquigarrow$ `eps`$=\ \beta^{1-t}$
- Non sono equispaziati.
  $0.100001\ 10^e - 0.100000\ 10^e = 10^{e-6}$
- Il risultato di un'operazione tra due numeri macchina può non essere un numero macchina. $\rightsquigarrow$ Operazioni di macchina.
  $0.632182\ 10^1 + 0.234843\ 10^{-1} = 0.63453043\ 10^1$
  $0.632182\ 10^1 \oplus 0.234843\ 10^{-1} = 0.634530\ 10^1$

Proprietà dei numeri macchina

- La somma e il prodotto di numeri macchina non sono sempre associative.

$$0.273283\ 10^0 \oplus (0.400000\ 10^{-6} \oplus 0.300000\ 10^{-6})$$

$$= 0.273283\ 10^0 \oplus 0.70000\ 10^{-6} = 0.273284\ 10^0$$

$$(0.273283\ 10^0 \oplus 0.400000\ 10^{-6}) \oplus 0.300000\ 10^{-6}$$

$$= 0.273283\ 10^0 \oplus 0.300000\ 10^{-6} = 0.273283\ 10^0$$

- Non è sempre vera la proprietà distributiva.

$$0.800000\ 10^9 \odot (0.500009\ 10^4 \ominus 0.500008\ 10^4)$$

$$= 0.800000\ 10^9 \odot 0.1\ 10^{-2} = 0.800000\ 10^6$$

$$(0.800000\ 10^9 \odot 0.500009\ 10^4) \ominus (0.800000\ 10^9 \odot 0.500008\ 10^4)$$

$$\rightsquigarrow \text{overflow}$$

Rappresentazione dei numeri sul calcolatore

Tipicamente sui calcolatori sono disponibili due formati per la rappresentazione dei numeri reali: la singola e la doppia precisione.

	Segno	Esponente	Mantissa
Singola precisione	1 bit	8 bits	23 bits
Doppia precisione	1 bit	11 bits	52 bits

Consistenza e stabilità

Un metodo numerico per la risoluzione approssimata di

$$F(x, d) = 0$$

consisterà nel costruire una successione di problemi approssimati

$$F_n(x_n, d_n) = 0$$

sperando che

$$x_n \to x \quad \text{per} \quad n \to \infty \,.$$

Un metodo si dice fortemente consistente se

$$F_n(x, d) = 0 \quad \forall\, n \,.$$

Si dice consistente se

$$F_n(x, d) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty \,.$$

Consistenza e stabilità

Un metodo numerico si dice stabile se per ogni n la soluzione x_n corrispondente al dato d_n esiste ed è unica e questa soluzione x_n dipende con continuità dal dato, ossia che a piccole variazioni del dato corrispondono piccole variazioni nella soluzione

Per un metodo numerico consistente, la stabilità è equivalente alla convergenza

Esempio

Dato un numero naturale n calcolare $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\, dx$.

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 \tfrac{x^{n+1}}{x+5}\, dx = \int_0^1 \tfrac{x^n(x+5-5)}{x+5}\, dx = \int_0^1 x^n\, dx - 5 I_n \\
&= \tfrac{1}{n+1} - 5 I_n \\
I_0 &= \int_0^1 \tfrac{1}{x+5}\, dx = \log \tfrac{6}{5}
\end{aligned}
$$

L'algoritmo:

```
I=log(6/5)
for m=0:n
   I=1/(m+1)-5*I
end
```

Esempio

Osservazioni:

- $I_n > 0$.
- $I_{n+1} < I_n$.

Cosa succede?

$$\hat{I}_0 = I_0 + \epsilon$$

$$\hat{I}_1 = 1 - 5\hat{I}_0 = 1 - 5(I_0 + \epsilon) = I_1 - 5\epsilon$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2} - 5\hat{I}_1 = \frac{1}{2} - 5(I_1 - 5\epsilon) = I_2 + 25\epsilon$$

$$\vdots$$

$$\hat{I}_n = I_n + (-5)^n\epsilon$$