Il metodo di eliminazione gaussiana - Pivoting

Il metodo di Gauss si arresta se si genera un elemento pivotale nullo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 5 \leadsto m_{1,2} = 2/1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \leadsto m_{1,3} = 1/1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 0x_2 - 7x_3 & = & -7 \\ -4x_2 - x_3 & = & -5 \leadsto m_{2,3} = -4/0 \ \ ?? \end{array}\right.$$

Ma in realtà il sistema ha soluzione. Scambiando la seconda e la terza riga.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ -4x_2 - x_3 & = & -5 \\ -7x_3 & = & -7 \end{array}\right.$$

Pivoting

- Se la matrice è invertibile e si trova un elemento pivotale nullo, il MEG può andare avanti usando la tecnica del pivoting $\rightsquigarrow$ scambiando righe.
- Scambiare righe in una matrice equivale a moltiplicarla per una matrice di permutazione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Pivoting

- Se l'elemento pivotale k-esimo è nullo $a_{k,k}^{(k)} = 0$ si cerca una riga i sotto la riga k-esima che abbia un elemento non nullo nella colonna k

$$i > k \quad \text{tale che} \quad a_{i,k}^{(k)} \neq 0$$

  e si scambiano queste due righe.
- Se la matrice è invertibile questa riga c'è.
- Un valore grande $m_{i,k}$ generato ad esempio da un elemento pivotale $a_{k,k}^{(k)}$ piccolo può amplificare eventuali errori di arrotondamento negli elementi $a_{k,j}^{(k)}$ $(k < j \leq n)$ e $b_k^{(k)}$.

Pivoting

Questa operazione viene generalmente operata ad ogni passaggio anche quando non si incontrano elementi pivotali nulli.

$$U = M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 A$$

Si sceglie come elemento pivotale l'elemento di modulo massimo della colonna k-essima sotto la diagonale principale.

Pivoting

$$U = M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1A$$

Ponendo $M = M_{n-1}P_{n-1}\dots M_1P_1$ e $P = P_{n-1}\dots P_1$

$$U = MA = (MP^{-1})PA\,; \quad (PM^{-1})U = PA$$

La matrice $L = PM^{-1}$ è triangolare inferiore con elementi diagonali pari ad uno.

$$PA = LU$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$\begin{cases} L\mathbf{y} = P\mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Analisi di stabilità per sistemi lineari

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \qquad A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

Dobbiamo misurare $\dfrac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ in funzione di $\dfrac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$.

Una norma in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall\, \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Esempi:

$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Analisi di stabilità per sistemi lineari

- Per definire una norma matriciale usaremo le norme in $\mathbb{R}^n$

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} .$$

  Questa norma si dice norma matriciale indotta o subordinata.
- Ha le stesse proprietà della norma vettoriale è in più

$$\|A\,B\| \leq \|A\|\|B\|\,, \forall\, A\,,\; B \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

- Esempi:
  $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$,
  $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Analisi di stabilità per sistemi lineari

- Il raggio spettrale di una matrice A è

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \,,$$

  dove λ_i sono gli autovalori di A.
- Per ogni norma matriciale subordinata

$$\rho(A) \leq \|A\| \,.$$

- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$. Se A è simmetrica $\|A\|_2 = \rho(A)$. Questa norma si chiama anche norma spettrale.

Analisi di stabilità per sistemi lineari

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

Dobbiamo misurare $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ in funzione di $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$.

$$\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\| \rightsquigarrow \|\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|}$$

$$\delta\mathbf{b} = A\,\delta\mathbf{x} \rightsquigarrow \delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b}$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$K(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$ numero di condizionamento di A

Analisi di stabilità per sistemi lineari

Oppure

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$A\delta\mathbf{x} + \delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \delta\mathbf{x} = -A^{-1}\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \, \|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \, .$$

Osserviamo che $K(A) \geq 1$.

Una matrice A si dice malcondizionata se $K(A) >> 1$.

Analisi di stabilità per sistemi lineari

Esempio di matrice malcondizionata $\rightsquigarrow$ Matrici di Hilbert

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$K(H_4) > 10^4 \quad K(H_8) > 10^{10}$$

Esercizi

- Verificare (senza fare la fattorizzazione) che esiste la fattorizzaione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

  cioè $A = LU$ con L matrice triangolare inferiore con elementi diagonali pari a uno e U matrice triangolare superiore.
- Calcolare la fattorizzazione LU della matrice A.

Esercizi

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

Esercizi

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 0.005x_1 + x_2 & = & 0.5 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$$

- Calcolare la soluzione in aritmetica esatta.
- Usando aritmetica floating point con due cifre di mantissa calcolare la soluzione usando
  - il metodo di eliminazione di Gauss senza pivotazione.
  - il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

  Confrontare i risultati.

Esercizi

Calcolare la fattorizzazione di Cholesky $A = R\,R^T$ della matrice simmetrica definita positiva

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & & \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{2,1} & r_{3,1} \\ & r_{2,2} & r_{3,2} \\ & & r_{3,3} \end{bmatrix}$$