Metodi iterativi per sistemi lineari

- Mirano a costruire la soluzione $\mathbf{x}$ di un sistema lineare come limite di una successione di vettori
- Per matrici piene di ordine n il costo computazionale è dell'ordine di n^2 operazioni per ogni iterazione. In generale richiedono più operazioni che i metodi diretti.
- Per matrici sparse di grandi dimensioni i metodi diretti possono essere onerosi a causa del fill-in.

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Metodi iterativi per sistemi lineari

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dato,} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f} \end{cases} \tag{2}$$

- Il metodo iterativo (2) per risolvere (1) si dice consistente se

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

- La matrice B si chiama matrice di iterazione.
- Sia $\mathbf{e}^{(k)} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$. Il metodo iterativo (2) è convergente se e solo se

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Se il metodo iterativo (2) è consistente allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(k+1)} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} \\
&= (B\mathbf{x} + \mathbf{f}) - (B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}) \\
&= B(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) \\
&= B\mathbf{e}^{(k)} = B^2\mathbf{e}^{(k-1)} = \cdots = B^{k+1}\mathbf{e}^{(0)}
\end{aligned}$$

$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|\mathbf{e}^{(0)}\| \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ se $\|B\| < 1$ per qualche norma matriciale.

Teorema Se il metodo iterativo (2) è consistente esso converge alla soluzione di (1) se e solo se $\rho(B) < 1$.

Metodi iterativi per sistemi linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad\qquad A = P - N$$

$$P\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

È naturale fare

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dato,} \\ P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}\,, \end{cases}$$

che, se P è invertibile, è un metodo iterativo della forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ dato,} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f} \end{cases}$$

con

$$B = P^{-1}N \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = P^{-1}\mathbf{b}\,.$$

Metodi iterativi per sistemi lineari. Il metodo di Jacobi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$a_{i,i} x_i = b_i - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} a_{i,j} x_j \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} a_{i,j} x_j \right] \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

Metodo di Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right] \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

Equivale ad aver scelto $P = D = diag(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$.

Metodi iterativi per sistemi lineari. Il metodo di Gauss-Seidel

Per $i = 1, \ldots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right] .$$

- Al passo $k+1$ si utilizzano i valori di $x_i^{(k+1)}$ già disponibili.
- Equivale ad aver scelto

$$P = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} .$$

- A differenza del metodo di Jacobi, è sequenziale.

Metodi iterativi per sistemi lineari. Il metodo SOR

Per $i = 1, \ldots, n$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right] + (1-\omega) x_i^{(k)} \,.$$

- Si chiama anche metodo di rilassamento successivo.
- ω è un numero reale diverso da zero.
- Per $\omega = 1$ si ritrova il metodo di Gauss-Seidel.
- Equivale ad aver scelto

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & \frac{1}{\omega} a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \frac{1}{\omega} a_{3,3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & \frac{1}{\omega} a_{n,n} \end{bmatrix} \,.$$

Metodi iterativi per sistemi lineari

$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$ con P invertibile. Per i metodo di Jacobi, Gauss-Seidel a SOR

$$P \text{ invertibile} \Leftrightarrow a_{i,i} \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Risultati di convergenza per i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

- Se A è una matrice a dominanza diagonale stretta per righe i metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel sono convergenti.
- Se A è simmetrica definite positiva, il metodo di Gauss-Seidel è convergente.
- Se A è simmetrica definite positiva, il metodo SOR converge se e solo se $0 < \omega < 2$.
- Il metodo SOR diverge se $\omega \leq 0$ o se $\omega \geq 2$.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Quando fermare un metodo iterativo?

Quando l'errore $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|$ è inferiore ad una tolleranza ϵ desiderata.

Ma l'errore è una quantità incognita ...

Servono degli stimatori dell'errore a posteriori che consentono di quantificare l'errore a partire da quantità già calcolate.

- Il residuo

$$\mathbf{r}^{(k)} := \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)} \,,$$

- L'incremento

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \,.$$

Metodi iterativi per sistemi lineari

Test d'arresto basato sul residuo

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} = A^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) = A^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\| \rightsquigarrow \|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{b}\|/\|A\|$$

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|/\|A\|} = K(A)\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\texttt{if} \;\; \|\mathbf{r}^{(k)}\| < \epsilon\|\mathbf{b}\| \;\; \texttt{STOP}$$

In questo modo

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A)\epsilon$$

Metodi iterativi per sistemi lineari

Test d'arresto basato sull'incremento

$$\texttt{if}\ \ \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \epsilon \|\mathbf{x}^{(k+1)}\|\ \ \texttt{STOP}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \\
&= B(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \|B\| \|\mathbf{e}^{(k)}\| + \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

Se $\|B\| < 1$

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| = \|B\mathbf{e}^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|$$

Il metodo del gradiente

Se A è simmetrica definita positiva, la risoluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a trovare il punto di minimo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ della forma quadratica

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}^T A\,\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{b}\,.$$

Effettivamente, siccome A è simmetrica

$$\nabla\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(A^T + A)\mathbf{y} - \mathbf{b} = A\mathbf{y} - \mathbf{b}\,.$$

Se $\mathbf{x}$ è punto di minimo $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ quindi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Reciprocamente, se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) > \Phi(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ perché A è simmetrica definita positiva.

Il metodo del gradiente

Per trovare il minimo della forma quadratica Φ

- si parte da un punto $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
- si scelgono opportune direzioni $\mathbf{d}^{(k)}$ lungo le quali muoversi per minimizzare Φ. (La direzione ottimale congiungente $\mathbf{x}^{(0)}$ e $\mathbf{x}$ non è nota a priori.)

Al generico passo k si determina $\mathbf{x}^{(k+1)}$ come

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \,,$$

dove $\alpha_k \in \mathbb{R}$ è il valore che fissa la lunghezza del passo nella direzione $\mathbf{d}^{(k)}$.

Il metodo del gradiente

Prende come direzione di discesa quella di massima pendenza:

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = -(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}) = \mathbf{r}^{(k)}$$

Per determinare α_k si cerca il punto di minimo di

$$J(\alpha) = \Phi(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha\mathbf{r}^{(k)})$$

J è un polinomio di secondo grado in α. Imponendo l'annullamento della derivata, $J'(\alpha_k) = 0$, si trova

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{(k)^T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)^T} A\,\mathbf{r}^{(k)}}\,.$$

Il metodo del gradiente

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, per $k = 0, 1, \ldots$ fino a convergenza

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}^{(k)^T}\mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)^T} A\,\mathbf{r}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

Teorema Se A è simmetrica definita positiva il metodo del gradiente converge per ogni $\mathbf{x}^{(0)}$ e

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|_A \leq \frac{K_2(A) - 1}{K_2(A) + 1}\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A$$

dove $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A^2 = \mathbf{e}^{(k)^T} A\,\mathbf{e}^{(k)}$.