COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico - III appello

1 settembre 2009

Esercizio 1

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-2	-1	1	3
y_i	-7	-3.9	2	8.1

i) calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati;

ii) calcolare il polinomio interpolatore di Lagrange.

i) $\sum_{i=0}^{3} 1 = 4 \quad \sum_{i=0}^{3} x_i = 1 \quad \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 4+1+1+9 = 15$

$\sum_{i=0}^{3} y_i = -10.9+10.1 = -0.8 \quad \sum_{i=0}^{3} x_i y_i = 14+3.9+2+24.3 = 44.2$

$r(x) = a_0 + a_1 x \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 44.2 \end{bmatrix} \quad a_0 = 44.2 - 15a_1$

$4(44.2 - 15a_1) + a_1 = -0.8 \quad 176.8 - 59a_1 = -0.8 \quad a_1 = \frac{177.6}{59} = 3.0102$

$a_0 = 44.2 - 15\frac{177.6}{59} = \frac{2067.8 - 2664}{59} = -0.95254$

$r(x) = -0.95254 + 3.0102x$

ii)

-2	-7			
-1	-3.9	$\frac{-3.9+7}{-1+2} = 3.1$		
1	2	$\frac{2+3.9}{1+1} = \frac{5.9}{2} = 2.95$	$\frac{2.95-3.1}{1+2} = \frac{-0.15}{3} = -0.05$	
3	8.1	$\frac{8.1-2}{3-1} = \frac{6.1}{2} = 3.05$	$\frac{3.05-2.95}{3+1} = \frac{0.1}{4} = 0.025$	$\frac{0.025+0.05}{3+2} = \frac{0.075}{5} = 0.015$

$P_3(x) = -7 + 3.1(x+2) - 0.05(x+2)(x+1) + 0.015(x+2)(x+1)(x-1)$

Esercizio 2

Data l'equazione

$$x^3 + 3x - 5 = 0$$

i) dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (1,2).

ii) Studiare la convergenza dei seguenti metodi iterativi per approssimare la soluzione dell'equazione data:

a) $x_{k+1} = \dfrac{2x_k^3 + 5}{3x_k^2 + 3}$

b) $x_{k+1} = \dfrac{5 - x_k^3}{3}$

i) $f(x) = x^3 + 3x - 5$ è un polinomio quindi una funzione continua

$f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$

$f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$

Esiste pertanto $\alpha \in (1,2)$ tale che $f(\alpha) = 0$

ii) a) $\phi_1(x) = \dfrac{2x^3+5}{3x^2+3}$

$\alpha = \dfrac{2\alpha^3+5}{3\alpha^2+3} \iff 3\alpha^3 + 3\alpha = 2\alpha^3 + 5 \iff \alpha^3 + 3\alpha - 5 = 0$

$\phi_1'(x) = \dfrac{6x^2(3x^2+3) - 6x(2x^3+5)}{(3x^2+3)^2} = \dfrac{6x^4 + 18x^2 - 30x}{(3x^2+3)^2} = 6x\dfrac{x^3+3x-5}{(3x^2+3)^2}$

$\phi_1'(\alpha) = 0$ quindi se si parte sufficientemente vicino ad α il metodo converge ad α

b) $\phi_2(x) = \dfrac{5 - x^3}{3}$

$\alpha = \dfrac{5-\alpha^3}{3} \iff 3\alpha = 5 - \alpha^3 \iff \alpha^3 + 3\alpha - 5 = 0$

$\phi_2'(x) = -\dfrac{3x^2}{3} = -x^2 \qquad |\phi_2'(\alpha)| = \alpha^2 > 1$ perché $\alpha \in (1,2)$

Questo metodo di punto fisso non converge.

Esercizio 3

Si consideri il seguente metodo a più passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy:

$$u_{n+1} = u_{n-3} + \frac{4h}{3}[2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}] .$$

i) Di quanti passi è?

ii) È zero stabile?

iii) È consistente?

Giustificare le risposte.

i) È un metodo a quattro passi

ii) $\rho(r) = r^4 - 1$ Le radici di ρ sono $z_1 = 1$ $z_2 = -1$ $z_3 = i$ $z_4 = -i$

Quattro radici diverse di modulo 1

Vale la condizione delle radici quindi il metodo è zero stabile

iii) $$\tau_{m+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_{m+1}) - y(t_{m-3}) - \frac{4}{3}h\left(2y'(t_m) - y'(t_{m-1}) + 2y'(t_{m-2})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[y(t_m) + h y'(t_m) - \big(y(t_m) - 3h y'(t_m)\big) - \frac{8}{3}h y'(t_m) + \frac{4}{3}h y'(t_m) - \frac{8}{3}h y'(t_m) + O(h^2)\Big]$$

$$= \frac{1}{h}\Big[\underbrace{(1-1)}_{0} y(t_m) + h\underbrace{\left(1+3-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\right)}_{4-\frac{12}{3}=0}\Big] + O(h)$$

$$= O(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Il metodo è consistente

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo iterativo per l'approssimazione della soluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta\left(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\right) \end{aligned}$$

dove θ è un numero reale. Usare un test d'arresto basato sul residuo.

La funzione deve:

- ricevere in ingresso la matrice A, il vettore termine noto $\mathbf{b}$, il parametro di rilassamento θ, la tolleranza `toll` e il numero massimo di iterazioni da fare `nitmax`, e restituire la soluzione approssimata `x` e il numero di iterazioni effetuate `nit`;
- prendere come valore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ il vettore termine noto $\mathbf{b}$;
- fermare le iterazioni quando $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\| \leq$ `toll`$\|\mathbf{b}\|$ oppure se il numero di iterazioni affettuate `nit` raggiunge il numero massimo di iterazioni da fare `nitmax`.

```
function [x, nit] = gradiente (A, B, theta, toll, nitmax)
    x = B;
    res = B - A * x;
    nit = 0;
    toll = toll * norm (B);
    while norm (res) > toll & nit < nitmax
        x = x + theta * res;
        res = B - A * x;
        nit = nit + 1
    end
```