COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico - I prova intermedia - A
8 aprile 2009

Esercizio 1

Usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -9 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$ Scambio 1ª e 3ª riga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad m_{21} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad m_{31} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ & 3+\frac{1}{2}(-3) & 1+\frac{1}{2}2 & -9+\frac{1}{2}8 \\ & 1-\frac{1}{2}(-3) & -1-\frac{1}{2}2 & 1-\frac{1}{2}8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ & \frac{3}{2} & 2 & -5 \\ & \frac{5}{2} & -2 & -3 \end{array}\right]$$

Siccome $\frac{5}{2} > \frac{3}{2}$ scambio 2ª e 3ª riga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ & 5/2 & -2 & -3 \\ & 3/2 & 2 & -5 \end{array}\right] \quad m_{32} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ & 5/2 & -2 & -3 \\ & & 2-\frac{3}{5}(-2) & -5-\frac{3}{5}(-3) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 8 \\ & 5/2 & -2 & -3 \\ & & \frac{16}{5} & -\frac{16}{5} \end{array}\right]$$

Risolvo il sistema triangolare superiore

$x_3 = -1 \qquad x_2 = \frac{2}{5}(-3+2x_1) = -2 \qquad x_1 = \frac{1}{4}[8+3x_2-2x_3] = \frac{1}{4}(8-6+2) = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

i) studiare la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel.

ii) Si consideri il sistema lineare

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix};$$

partendo da $x^{(0)} = [0,0,1]^T$ fare due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

i) La matrice A è simmetrica.

Siccome $3>0$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12-4=8>0$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 36+4+4-16-3-12 = 13>0$

per il criterio di Sylvester A è simmetrica definita positiva quindi il metodo di Gauss-Seidel converge.

ii) Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(3+2x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(1+2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(4-2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}\right)$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\left(4-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(3+\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(3-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{9} \\ \frac{1}{4}\left(1+\frac{10}{9}+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{9+10+12}{9} = \frac{31}{36} \\ \frac{1}{3}\left(4-\frac{10}{9}+\frac{31}{36}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{144-40+31}{36} = \frac{135}{3\cdot 36} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ 31/36 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Data l'equazione

$$e^{x-3} = 4 - 2x$$

i) dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (1,2).

ii) Usando il metodo di Newton, approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-2}.

iii) Studiare la convergenza del seguente metodo iterativo per approssimare la soluzione dell'equazione data:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(4 - e^{x^{(k)}-3}\right)$$

i) $e^{x-3} = 4-2x \iff e^{x-3}+2x-4=0$

$f(x) = e^{x-3}+2x-4$ è una funzione continua

$f(1) = e^{-2}-2 = \frac{1}{e^2}-2 < 0$

$f(2) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in (1,2): f(\alpha)=0$

ii) $x^{(0)} = \frac{3}{2}$ $\qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{e^{x^{(k)}-3}+2x^{(k)}-4}{e^{x^{(k)}-3}+2}$

$x^{(1)} = \frac{3}{2} - \dfrac{e^{-3/2}+3-4}{e^{-3/2}+2} = \frac{3}{2} - \dfrac{e^{-3/2}-1}{e^{-3/2}+2} = \frac{3}{2}+0.34945 = 1.84945$

$|x^{(1)}-x^{(0)}| = 0.34945 > 10^{-2}$

$x^{(2)} = 1.84945 - \dfrac{e^{1.84945-3}+2\cdot 1.84945-4}{e^{1.84945-3}+2} = 1.84945 - 0.00663 =$
$= 1.84282$

$|x^{(2)}-x^{(1)}| = 0.00663 < 10^{-2}$ STOP

$\alpha \simeq 1.84282$

iii) $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ $\qquad \phi(x) = \frac{1}{2}(4-e^{x-3})$

Chiaramente $e^{x-3}=4-2x \iff x = \frac{1}{2}(4-e^{x-3})$.

$\phi'(x) = -\frac{1}{2}e^{x-3}$ $\qquad |\phi'(x)| = \frac{1}{2}e^{x-3}$

Siccome $\alpha \in (1,2)$ $\quad \alpha-3<0$ quindi $e^{\alpha-3}<1$

$|\phi'(\alpha)| = \frac{1}{2}e^{\alpha-3} < \frac{1}{2}$, partendo sufficientemente vicini ad α l'iterazione di punto fisso converge.

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-2	0	1	2
y_i	-5.1	1	1.2	2.7

i) calcolare la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati;

ii) calcolare il polinomio interpolatore di Lagrange.

i) $\sum_{i=0}^{3} 1 = 4 \qquad \sum_{i=0}^{3} x_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 4+1+4=9$

$\sum_{i=0}^{3} y_i = -5.1+4.9=-0.2 \qquad \sum_{i=0}^{3} x_i y_i = 10.2+1.2+5.4=16.8$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 16.8 \end{bmatrix} \qquad 4a_0 + a_1 = -0.2 \qquad a_1 = -4a_0 - 0.2$$

$a_0 + 9(-4a_0 - 0.2) = 16.8$

$-35a_0 - 1.8 = 16.8 \qquad -35a_0 = 18.6$

$a_0 = -\frac{18.6}{35} \qquad a_1 = \frac{74.4}{35} - 0.2 = \frac{74.4-7}{35} = \frac{67.4}{35}$

$r(x) = \frac{67.4}{35}x - \frac{18.6}{35}$

ii)

-2	-5.1			
0	1	$\frac{1+5.1}{0+2} = \frac{6.1}{2} = 3.05$		
1	1.2	$\frac{1.2-1}{1-0} = 0.2$	$\frac{0.2-3.05}{1+2} = \frac{-2.85}{3} = -0.95$	
2	2.7	$\frac{2.7-1.2}{2-1} = 1.5$	$\frac{1.5-0.2}{2-0} = \frac{1.3}{2} = 0.65$	$\frac{0.65+0.95}{2+2} = \frac{1.6}{4} = 0.4$

$P_3(x) = -5.1 + 3.05(x+2) - 0.95(x+2)x + 0.4(x+2)x(x-1)$