COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

Calcolo Numerico - I appello

22 giugno 2009

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i) dire se esiste la fattorizzazione LU della matrice del sistema e giustificare la risposta.

ii) Risolvere il sistema lineare usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

i) Non esiste la fattorizzazione LU della matrice del sistema. Infatti il determinante della sottomatrice principale $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ è zero.

ii)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} m_{21} = \frac{-2}{2} = -1 \\ m_{31} = \frac{1}{2} \\ m_{41} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 2-\frac{1}{2} & 0+\frac{1}{2} & -2-0 & 3-0 \\ & 3-\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{2} & 1-0 & 4-0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 3/2 & 1/2 & -2 & 3 \\ & 5/2 & 5/2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Scambio la seconda riga con la quarta riga che ha l'elemento di modulo massimo della seconda colonna

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 5/2 & 5/2 & 1 & 4 \\ & 3/2 & 1/2 & -2 & 3 \\ & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} m_{32} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5} \\ m_{42} = 0/\frac{5}{2} = 0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 5/2 & 5/2 & 1 & 4 \\ & & \frac{1}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{2} & -2-\frac{3}{5} & 3-\frac{3}{5}4 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 5/2 & 5/2 & 1 & 4 \\ & & -1 & \frac{-13}{5} & \frac{3}{5} \\ & & & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Risolvo il sistema triangolare usando il metodo della sostituzione all'indietro

$x_4 = -1 \qquad x_3 = -\left(\frac{3}{5} + \frac{13}{5} x_4\right) = -\left(\frac{3}{5} - \frac{13}{5}\right) = 2$

$x_2 = \frac{2}{5}\left(4 - \frac{5}{2}x_3 - x_4\right) = \frac{2}{5}(4 - 5 + 1) = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 + x_3) = \frac{1}{2} 2 = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Data l'equazione

$$\frac{1}{x^2+3} = 3x - 4$$

i) dimostrare che ha soluzione nell'intervallo (1,2).

ii) Usando il metodo di bisezione, approssimare la soluzione con errore minore di 0.2.

iii) Usando il metodo di Newton, approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-3}.

i) $\frac{1}{x^2+3} = 3x-4 \iff 1=(3x-4)(x^2+3) \iff 1 = 3x^3-4x^2+9x-12$

$\iff 3x^3-4x^2+9x-13=0$ $\quad f(x)=3x^3-4x^2+9x-13$ è un polinomio quindi una funzione continua. $f(1)=3-4+9-13=-5<0$

$f(2)=24-16+18-13=13>0$ quindi esiste $\alpha \in (1,2)$ tale che $f(\alpha)=0$

ii) $x^{(0)} = \frac{3}{2}$ $\quad |x^{(0)}-\alpha| < \frac{1}{2} = 0.5$ (>0.2)

$f(x^{(0)}) = \frac{81}{8} - 9 + \frac{27}{2} - 13 = \frac{81-72+108-104}{8} > 0 \implies \alpha \in (1, \frac{3}{2})$

$x^{(1)} = \frac{5}{4}$ $\quad |x^{(1)}-\alpha| < \frac{1}{4} = 0.25$ (>0.2)

$f(x^{(1)}) = \frac{375}{64} - \frac{25}{4} + \frac{45}{4} - 13 = \frac{375}{64} - 8 < 0 \implies \alpha \in (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$

$x^{(2)} = \frac{11}{8}$ $\quad |x^{(2)}-\alpha| < \frac{1}{8} < 0.2$ STOP

iii) $x^{(0)} = \frac{11}{8}$ $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{3x^{(k)3} - 4x^{(k)2} + 9x^{(k)} - 13}{9x^{(k)2} - 8x^{(k)} + 9}$

$x^{(1)} = \frac{11}{8} + 0.02588 = 1.40088$ $\quad |x^{(0)} - x^{(1)}| = 0.02588 > 10^{-3}$

$x^{(2)} = 1.40088 - 0.00037 = 1.40051$ $\quad |x^{(1)} - x^{(2)}| = 0.00037 < 10^{-3}$ STOP

Esercizio 3

i) Approssimare

$$I = \int_0^{4/3} \left(\frac{1}{x+1} - x\cos(\pi x) \right) dx$$

usando il metodo di Cavalieri-Simpson composito con due sottointervalli.

ii) Stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare I con errore minore di 10^{-2} usando il metodo dei trapezi.

i) $$\int_0^{4/3} \left(\frac{1}{x+1} - x\cos(\pi x) \right) dx = \int_0^{2/3} \left(\frac{1}{x+1} - x\cos(\pi x) \right) dx + \int_{2/3}^{4/3} \left(\frac{1}{x+1} - x\cos(\pi x) \right) dx$$

$$\simeq \frac{2/3}{6} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right] + \frac{2/3}{6} \left[f\left(\frac{2}{3}\right) + 4f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) \right]$$

x	0	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$
$f(x)$	1	$\frac{1}{\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$	$\frac{1}{\frac{2}{3}+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{14}{15}$	$\frac{1}{1+1} + 1 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{\frac{4}{3}+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{23}{21}$

$$I_{CS}^2(f) = \frac{1}{9}\left[1 + 4\cdot\frac{7}{12} + 2\frac{14}{15} + 4\frac{3}{2} + \frac{23}{21}\right] = \frac{1}{9}\left[1 + \frac{7}{3} + \frac{28}{15} + 6 + \frac{23}{21}\right] = 1.3661$$

ii) $$f(x) = \frac{1}{x+1} - x\cos(\pi x) \qquad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \cos(\pi x) + \pi x \operatorname{sen}(\pi x)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} + \pi \operatorname{sen}(\pi x) + \pi \operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 x \cos(\pi x) =$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3} + 2\pi \operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 x \cos(\pi x)$$

Se $x \in [0, 4/3]$ $\quad |f''(x)| \le 2 + 2\pi + \pi^2 \frac{4}{3}$

$$|I - I_T^N| \le \frac{1}{12}(b-a)H^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)| \qquad \text{con } H = \frac{b-a}{N}$$

$$|I - I_T^N| \le \frac{1}{12}\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3N}\right)^2 \left(2 + 2\pi + \pi^2 \frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{16}{81}\frac{1}{N^2}\left(2 + 2\pi + \pi^2\frac{4}{3}\right) < 10^{-2} \iff \frac{16}{81} 10^2 \left(2 + 2\pi + \pi^2\frac{4}{3}\right) < N^2$$

$$\frac{4}{9} 10 \sqrt{2 + 2\pi + \pi^2\frac{4}{3}} < N$$

$20.58 < N \qquad N \geq 21$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implemeti il seguente metodo predictor-corrector per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy.

$$u_{n+1}^* = u_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$$

$$f_{n+1}^* = f(t_{n+1}, u_{n+1}^*)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1}^* + 8f_n - f_{n-1})$$

(Come al solito $f_k := f(t_k, u_k)$.)
Prendere $u_0 = y(t_0)$ e usare il metodo di Eulero in avanti

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$$

per calcolare u_1.

```
function [t,u] = preco(fun,tφ,T,yφ,N)
h=T/N;
t=[tφ:h:tφ+T];
u(1)=yφ;
f(1)=feval(fun,t(1),u(1));
u(2)=u(1)+h*f(1);
for n=2:N
   f(n)=feval(fun,t(n),u(n));
   aux=u(n)+h/2*(3*f(n)-f(n-1));
   faux=feval(fun,t(n+1),aux);
   u(n+1)=u(n)+h/12*(5*faux+8*f(n)-f(n-1));
end
```