COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico (140060 - 6 CFU) - II appello

5 febbraio 2010

Esercizio 1

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

i) Studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

ii) Partendo da $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 2

i) Dimostrare che l'equazione

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = (1-x)^3$$

ha una soluzione α nell'intervallo $[0, 1]$.

ii) Usando il metodo di Newton, approssimare α con errore minore di 10^{-2}.

Esercizio 3

Usando il metodo dei trapezi oppure il metodo di Cavalieri-Simpson approssimare

$$\int_2^3 \exp\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\, dx$$

con errore minore di 10^{-2}.
(Dimostrare che il numero di sottointervalli usato garantisce effettivamente un errore minore di 10^{-2}.)

COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Calcolo Numerico (140060 - 6 CFU) - II appello

5 febbraio 2010

Prova MATLAB

Risolvere il **sistema** di equazioni alle derivate ordinarie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(\mathbf{y}, t) = -\mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad t \in [0; 1], \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y_0}, \tag{2}$$

applicando il seguente metodo di Eulero <u>*implicito*</u>:

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \Delta t f(\mathbf{y}^{n+1}, t^{n+1}). \tag{3}$$

$\mathbf{y}$ è un vettore di lungezza N e $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$ è una matrice simmetrica, positiva definita di dimensione $N \times N$.

1. Riscrivere il metodo di Eulero implicito (3) utilizzando esplicitamente la definizione della funzione $f(\mathbf{y}, t)$ data in (1) e utilizzando $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$. Scrivere il sistema lineare finale per il vettore delle incognite $\mathbf{y}^{n+1}$ in forma matriciale.

2. La matrice del sistema finale da risolvere è simmetrica e positiva definita e quindi il sistema si può risolvere con il metodo del gradiente coniugato. Scrivere una funzione MATLAB **CG.m** per risolvere il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con il metodo del gradiente coniugato. In input la funzione riceve la matrice $\mathbf{A}$ del sistema e il vettore noto $\mathbf{b}$. Il output della funzione è il vettore della soluzione $\mathbf{x}$. Fissare una tolleranza appropriata. L'utilizzo degli operatori e delle funzioni interni di MATLAB ('inv', '\','linsolve','cgs') per risolvere sistemi lineari **non** è permesso!

3. Scrivere uno script MATLAB **EulerImplicit.m** che risolvi l'equazione (1) con il metodo di Eulero implicito (3) e che utilizzi il risolutore per sistemi lineari programmato nella domanda precedente. Per questa domanda, fissare all'inizio dello script MATLAB $N = 5$, e $\mathbf{y_0}$ e $\mathbf{B}$ come:

$$\mathbf{y_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$