COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico (140060 - 6 CFU) - I appello

18 gennaio 2010

Esercizio 1

i) Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Usando la fattorizzazione LU di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

i) Dimostrare che l'equazione

$$\log x = \frac{1}{1+x^2}$$

ha una soluzione α nell'intervallo $[1, 2]$.

ii) Usando il metodo di Newton, approssimare α con errore minore di 10^{-2}.

ii) Studiare la convergenza del seguente metodo di punto fisso per approssimare α:

$$x_{k+1} = \exp\left(\frac{1}{1+x_k^2}\right)$$

Esercizio 3

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{ty} & t \in [1, 2] \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

usando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.5$.

COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Calcolo Numerico (140060 - 6 CFU) - I appello

18 gennaio 2010

Prova MATLAB

Risolvere l'equazione alle derivate ordinarie

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) = -ay + bt, \qquad t \in [0;1], \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

applicando il seguente metodo di Runge-Kutta:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y^n, t^n), \\ k_2 &= f(y^n + \frac{1}{2}\Delta t k_1, t^n + \frac{1}{2}\Delta t), \\ k_3 &= f(y^n - \Delta t k_1 + 2\Delta t k_2, t^n + \Delta t), \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{1}{6}\Delta t\,(k_1 + 4k_2 + k_3)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

1. Scrivere una funzione MATLAB **f.m** che implementi la funzione $f(y,t)$ dell'equazione (1).
2. Scrivere uno script MATLAB **RK.m** che risolva il problema (1),(2) con il metodo di Runge-Kutta definito in (3). In questo esercizio i valori per a, b e y_0 vengono fissati all'inizio del programma: $a = 10$, $b = 2$ e $y_0 = 1$, ma l'algoritmo implementato deve funzionare anche per valori generali di a, b e y_0.
3. La soluzione esatta del problema (1),(2) è:

   $$y\,(t) = \frac{abt - b}{a^2} + e^{-at}\left(y_0 + \frac{b}{a^2}\right). \tag{4}$$

   Alla fine dello script **RK.m** calcolare l'errore $e = |y_{RK} - y(t)|$ della soluzione numerica y_{RK} rispetto alla soluzione esatta $y(t)$ definita in (4).
4. Modificare lo script **RK.m** in modo tale da verificare numericamente l'ordine di accuratezza del metodo (3). Descrivere tutti i passi necessari. Si ricorda che

   $$p = \frac{\log(e_1/e_2)}{\log(\Delta t_1/\Delta t_2)}. \tag{5}$$