COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Primo appello a.a. 2010-2011

10 gennaio 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione LU di A;

ii) calcolare la fattorizzazione LU di A;

iii) usando la fattorizzazione LU di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Data l'equazione non lineare

$$x \log x = 2 + x - x^2$$

i) dimostrare che ha una soluzione α e che $\alpha \in (1,2)$;

ii) studiare la convergenza ad α dei seguenti metodi di punto fisso:

a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} \log x^{(k)} + (x^{(k)})^2 - 2$;

b) $x^{(k+1)} = \dfrac{(x^{(k)})^2 + x^{(k)} + 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}}$.

Esercizio 3

Dato l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{e^{1-x}}{x} \, dx$$

i) stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare I con errore minore di 10^{-2} usando la formula del punto medio;

ii) approssimare I usando la formula di Gauss a due punti.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (t+2)(y+3) \quad t \in [0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Crank-Nicolson.

COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico (Ing. Industriale) - Quarto appello a.a. 2009-2010

10 gennaio 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione LU di A;

ii) calcolare la fattorizzazione LU di A;

iii) usando la fattorizzazione LU di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Data l'equazione non lineare

$$x \log x = 2 + x - x^2$$

i) dimostrare che ha una soluzione α e che $\alpha \in (1, 2)$;

ii) studiare la convergenza ad α dei seguenti metodi di punto fisso:

  a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} \log x^{(k)} + (x^{(k)})^2 - 2$;

  b) $x^{(k+1)} = \dfrac{(x^{(k)})^2 + x^{(k)} + 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}}$.

Esercizio 3

Dato l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{e^{1-x}}{x}\, dx$$

i) stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare I con errore minore di 10^{-2} usando la formula del punto medio;

ii) approssimare I usando la formula del punto medio con 4 sottointervalli.

Esercizio 4

Risolvere l'equazione alle derivate ordinarie

$$y' = f(y,t) = (y+a)(t+b), \qquad t \in [0,T] \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

usando il metodo di Runge-Kutta

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y^n, t^n), \\ k_2 &= f(y^n + \tfrac{1}{2}\Delta t\, k_1, t^n + \tfrac{1}{2}\Delta t), \\ k_3 &= f(y^n - \Delta t\, k_1 + 2\Delta t\, k_2, t^n + \Delta t), \end{aligned}$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{6}\Delta t(k_1 + 4k_2 + k_3). \tag{3}$$

1. Scrivere una funzione MATLAB **f.m** che implementi la funzione $f(y,t)$ dell'equazione (1).
2. Scrivere uno script di MATLAB **RK.m** che risolva il problema (1), (2) con il metodo di Runge-Kutta definito in (3). In questo esercizio i valori per a, b, y_0 e T vengono fissati all'inizio del programma: $a = 3$, $b = 2$, $y_0 = 1$, $T = 2$ ma l'algoritmo implementato deve funzionare anche per valori generali di a, b, y_0 e T.