COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Calcolo Numerico [140060] Ing. Civile - Quarto appello a.a. 2010–2011

20 giugno 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione di Cholesky;

ii) calcolare la fattorizzazione di Cholesky di A;

iii) usando la fattorizzazione di Cholesky di A risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{3+x}$

i) calcolare il polinomio $P_3(x)$ che interpola f nei nodi -2, -1, 0, 2;

ii) calcolare il polinomio $P_4(x)$ che interpola f nei nodi -2, -1, 0, 1, 2.

Esercizio 3

Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y+1}{1+2t} \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

i) scrivere il metodo di Taylor di ordine 2;

ii) approssimare $y(0.5)$ usando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.25$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodi di Richardson per sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta P^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned}$$

dove $\theta > 0$ è un parametro di rilassamento e P una matrice di precondizionamento.

- La funzione deve ricevere in ingresso la matrice A e il vettore termine noto $\mathbf{b}$ del sistema lineare, il parametro di rilassamento θ e la matrice di precondizionamento P.
- Deve restituire la soluzione approssimata `x` e il numero d'iterazioni effettuate `nit`.
- Il metodo iterativo si deve fermare quando il residuo relativo è minore di 10^{-8}, cioè quando

  $$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-8}\|\mathbf{b}\|$$

  oppure se si superano le 500 iterazioni.

COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

Calcolo Numerico [40127] (5 crediti) - 20 giugno 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A;

ii) calcolare la fattorizzazione LU di A;

iii) risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

Esercizio 2

Dato l'integrale

$$I = \int_0^1 (1 + x^2)e^{-x^2}\, dx$$

i) stimare il numero di sottointervalli necessari affinche l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-6};

ii) approssimare I usando il metodo del punto medio con 4 sottointervalli.

Esercizio 3

Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{yt}{1+t^2} & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

i) scrivere il metodo di Taylor di ordine 2;

ii) approssimare $y(0.5)$ usando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.25$.

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Milne per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Milne:

$u_0 = y_0$

u_1, u_2, u_3 calcolati con un metodo ad un passo

Per $n \geq 3$

$$u_{n+1} = u_{n-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 2f(t_{n-2}, u_{n-2})]$$