COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Primo appello a.a. 2010-2011

10 gennaio 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione LU di A;

ii) calcolare la fattorizzazione LU di A;

iii) usando la fattorizzazione LU di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

i) La matrice A è simmetrica definita positiva perché $A^T = A$ e $3 > 0$
$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 > 0$ e $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12-(8+2) > 0$ (criterio di Sylvester) quindi esiste la fattorizzazione LU di A

ii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $m_{21} = -1/3$, $m_{31} = 2/3$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 2+\frac{1}{3}(-1) & \frac{1}{3}2 \\ & -\frac{2}{3}(-1) & 2-\frac{2}{3}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 5/3 & 2/3 \\ & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $m_{32} = \frac{2}{5}$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 5/3 & 2/3 \\ & & \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 5/3 & 2/3 \\ & & 2/5 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/3 & 1 & \\ 2/3 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) $Ax = b \iff \begin{matrix} Ly = b \\ Ux = y \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1/3 & 1 & \\ 2/3 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ & 5/3 & 2/3 \\ & & 2/5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ $x_3 = 2$ $x_2 = \frac{3}{5}\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 1$ $x_1 = \frac{1}{3}(1-4) = -1$ $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Esercizio 2

Data l'equazione non lineare

$$x \log x = 2 + x - x^2$$

i) dimostrare che ha una soluzione α e che $\alpha \in (1,2)$;

ii) studiare la convergenza ad α dei seguenti metodi di punto fisso:

a) $x^{(k+1)} = x^{(k)} \log x^{(k)} + (x^{(k)})^2 - 2$;

b) $x^{(k+1)} = \dfrac{(x^{(k)})^2 + x^{(k)} + 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}}$.

i) $f(x) = x \log x + x^2 - x - 2$ è una funzione continua in $(0,+\infty)$ quindi in $(1,2)$ $f(1) = 1-1-2<0$ $f(2) = 2\log 2 + 4 - 2 - 2 = 2\log 2 > 0$. Esiste pertanto $\alpha \in (1,2)$ tale che $f(\alpha) = 0$

ii) a) $\phi_a(x) = x \log x + x^2 - 2$

$\phi_a'(x) = \log x + 1 + 2x > 1$ se $x \in (1,2)$ quindi $|\phi_a'(\alpha)| > 1$ questo metodo di punto fisso non converge.

b) Questo è il metodo di Newton per $f(x)$

$f'(x) = \log x + 1 + 2x - 1 = \log x + 2x$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}\log(x^{(k)}) + [x^{(k)}]^2 - x^{(k)} - 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}} =$$

$$= \frac{\cancel{x^{(k)}\log x^{(k)}} + 2[x^{(k)}]^2 - \cancel{x^{(k)}\log(x^{(k)})} - [x^{(k)}]^2 + x^{(k)} + 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}}$$

$$= \frac{[x^{(k)}]^2 + x^{(k)} + 2}{\log x^{(k)} + 2x^{(k)}}$$

Quindi $\phi_B(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{\log x + 2x}$ e $\phi_B'(\alpha) = 0$ Questo metodo di punto fisso converge

Esercizio 3

Dato l'integrale

$$I = \int_1^2 \frac{e^{1-x}}{x}\, dx$$

i) stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare I con errore minore di 10^{-2} usando la formula del punto medio;

ii) approssimare I usando la formula di Gauss a due punti.

i) $$|I - I_N^{PM}| = \frac{b-a}{24} H^2 |f''(\xi)| \quad \text{con} \quad H = \frac{b-a}{N} \quad \text{e } \xi \in [a,b]$$

In questo esercizio $a=1$, $b=2$ e $f(x) = \frac{e^{1-x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{-e^{1-x}x - e^{1-x}}{x^2} = -\frac{(1+x)e^{1-x}}{x^2} \qquad f''(x) = -\frac{[1-(1+x)]e^{1-x}x^2 - 2x(1+x)e^{1-x}}{x^4} =$$

$$= \frac{[x^3 + 2x(1+x)]e^{1-x}}{x^4} = \frac{x^2+2x+2}{x^3} e^{1-x}$$

$f''(x) > 0$ se $x \in [1,2]$ quindi $|f''(x)| = f''(x)$ se $x \in [1,2]$

$$f'''(x) = \frac{[\cancel{2x+2} - (x^2 + \cancel{2x+2})]e^{1-x}x^3 - 3x^2(x^2+2x+2)e^{1-x}}{x^6} =$$

$$= -\frac{x^3 + 3(x^2+2x+2)}{x^4} e^{1-x} < 0 \quad \text{se } x \in [1,2]$$

$$\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| = f''(1) = 5$$

$$\frac{1}{24}\frac{1}{N^2} 5 < 10^{-2} \quad \text{se} \quad \sqrt{\frac{5}{24}}\, 10 < N \qquad 5\sqrt{\frac{5}{6}} < N \qquad 4{,}5644 < N \qquad \boxed{N \geq 5}$$

ii) $$\int_1^2 \frac{e^{1-x}}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+s)}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}s}\, ds = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+s)}}{3+s}\, ds$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}s$$

$$F(s) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+s)}}{3+s}$$

s	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$F(s)$	0.33414	0.12703

$$\int_1^2 \frac{e^{1-x}}{x}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+s)}}{3+s}\, ds \simeq F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.46118$$