COGNOME NOME N. Matricola

Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Prima prova intermedia - A

4 novembre 2010

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione di Cholesky di A;

ii) calcolare la fattorizzazione di Cholesky di A;

iii) usando la fattorizzazione di Cholesky di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i) La matrice A è simmetrica perchè $A^T = A$. È definita positiva perchè i determinanti delle sottomatrici principali sono positivi

$3>0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-1>0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6+1+1-(1+3+2)>0$

La fattorizzazione di Cholesky di A esiste perché A è simmetrica definita positiva

ii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & \\ r_{21} & r_{22} & \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ & r_{22} & r_{32} \\ & & r_{33} \end{bmatrix}$

$r_{11}^2 = 3 \Rightarrow r_{11} = \sqrt{3}$

$r_{21} r_{11} = 1 \Rightarrow r_{21} = 1/\sqrt{3}$

$r_{31} r_{11} = -1 \Rightarrow r_{31} = -1/\sqrt{3}$

$r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1 \quad r_{22} = \sqrt{1-1/3} = \sqrt{2/3} \qquad r_{31} r_{21} + r_{32} r_{22} = -1 \qquad \frac{-1}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, r_{32} = -1 \Rightarrow r_{32} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 2 \qquad r_{33} = \sqrt{2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 1$

$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & \\ -1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 1 \end{bmatrix} \qquad A = RR^T$

iii) $Ax = RR^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Chiamando $y = R^T x$ $\begin{cases} Ry = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ R^T x = y \end{cases}$

$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & \\ -1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y_1 = 2/\sqrt{3} \quad y_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$

$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ & \sqrt{2/3} & -\sqrt{2/3} \\ & & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = 1$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i) studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel;

ii) scrivere il metodo di Gauss-Seidel

iii) partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ è simmetrica definita positiva perché $A^T = A$ e

$3>0$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12-4>0$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 24-(12+8)>0$ quindi il

metodo di Gauss-Seidel converge

Per studiare la convergenza di Jacobi calcoliamo il raggio spettrale

della matrice d'iterazione $B_J = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$|B_J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2/3 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & -1/2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} = \lambda\left(\frac{5}{6} - \lambda^2\right)$ $\rho(B_J) = \sqrt{\frac{5}{6}} < 1$

quindi anche il metodo di Jacobi converge.

ii) $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(1 + 2x_2^{(k)}\right)$

$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(4 + 2x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right)$

$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(4 - 2x_2^{(k+1)}\right)$

iii) $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1^1 = \frac{1}{3}(1+0) = 1/3$

$x_2^1 = \frac{1}{4}\left(4 + \frac{2}{3} - 0\right) = \frac{7}{6}$

$x_3^1 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{7}{3}\right) = \frac{5}{6}$

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 7/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}$

$x_1^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{7}{3}\right) = \frac{10}{9}$

$x_2^2 = \frac{1}{4}\left(4 + \frac{20}{9} - \frac{5}{3}\right) = \frac{36+20-15}{36} = \frac{41}{36}$

$x_3^2 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{41}{18}\right) = \frac{72-41}{36} = \frac{31}{36}$

$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 10/9 \\ 41/36 \\ 31/36 \end{bmatrix}$

Esercizio 3

Data l'equazione non lineare

$$\frac{x^3 - x - 7}{x^2 + 1} = 2x - 1$$

i) dimostrare che ha una unica soluzione α e che $\alpha \in (-2, -1)$;

ii) usando il metodo di bisezione approssimare α con errore minore di 0.25;

iii) approssimare α con errore stimato minore di 10^{-2};

iv) studiare la convergenza ad α del seguente metodo di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = \frac{-1}{3}\left[(x^{(k)})^3 - (x^{(k)})^2 + 6\right].$$

i) $\frac{x^3-x-7}{x^2+1} = 2x-1 \iff x^3-x-7 = (2x-1)(x^2+1) \iff x^3-x-7 = 2x^3-x^2+2x-1$

$\iff 0 = x^3-x^2+3x+6$

$f(x)=x^3-x^2+3x+6$ è un polinomio quindi una funzione continua $\left|\begin{array}{l}\exists\alpha\in(-2,-1)\\ f(\alpha)=0\end{array}\right.$

$f(-2) = -8-4-6+6<0$

$f(-1) = -1-1-3+6>0$

$f'(x) = 3x^2-2x+3 > 0$ se $x<0$ $\Rightarrow f$ è monotona in $(-2,-1) \Rightarrow \alpha$ è unica.

ii) $x^{(0)} = \frac{-2-1}{2} = \frac{-3}{2}$ $\quad |\alpha - x^{(0)}| < \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ (>0.25)

$f(x^{(0)}) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 6 = \frac{-27-18-36+48}{8} < 0 \Rightarrow \alpha \in (-\frac{3}{2}, -1)$

$x^{(1)} = \frac{-3/2-1}{2} = -\frac{5}{4}$ $\quad |\alpha - x^{(1)}| < \frac{-1+3/2}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$ STOP

iii) Uso il metodo di Newton $\quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{[x^{(k)}]^3 - [x^{(k)}]^2 + 3x^{(k)} + 6}{3[x^{(k)}]^2 - 2[x^{(k)}] + 3}$

con $x^{(0)} = -\frac{5}{4}$ e mi fermo quando

$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < 10^{-2}$

	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$
$k=0$	$-5/4$	-1.2656	10.188	-0.12423
$k=1$	-1.1258	-0.07139	9.0536	-0.007886 STOP

$\alpha \simeq -1.1258 + 0.07886 = -1.1179$

iv) $\phi(x) = \frac{-1}{3}[x^3 - x^2 + 6]$ $\quad \phi'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 2x) = -x^2 + \frac{2}{3}x$

Se $x \in (-2,-1)$ $\quad \phi'(x) < 0 \Rightarrow |\phi'(x)| = x^2 - \frac{2}{3}x$ se $x\in(-2,-1)$

Se $x \in (-2,-1)$ $\quad x^2 - \frac{2}{3}x > x^2 > 1$. Siccome $\alpha \in (-1,-2)$ $|\phi'(\alpha)| > 1$

quindi il metodo di punto fisso non converge

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-1.0	-0.5	1.0	2.0
y_i	2.0	1.4	0.2	-0.2

calcolare

i) il polinomio interpolatore di Lagrange;

ii) il valore della funzione di interpolazione composita lineare a tratti nel punto $x = 0$.

$$
\begin{array}{llll}
-1 & 2 & & \\
-\frac{1}{2} & 1.4 & \frac{1.4-2}{-\frac{1}{2}+1} = -1.2 & \\
1 & 0.2 & \frac{0.2-1.4}{1+1/2} = -\frac{2}{3}\,1.2 = -0.8 & \frac{-0.8+1.2}{1+1} = 0.2 \\
2 & -0.2 & \frac{-0.2-0.2}{1} = -0.4 & \frac{-0.4+0.8}{2+1/2} = \frac{2}{5}\,0.4 = \frac{0.8}{5} \quad \frac{\frac{0.8}{5}-0.2}{3} = \frac{-0.2}{15} = -\frac{1}{75}
\end{array}
$$

Forma di Newton del polinomio interpolatore

$$P_3(x) = 2 - 1.2(x+1) + 0.2(x+1)(x+1/2) - \frac{1}{75}(x+1)(x+1/2)(x-1)$$

$0 \in (-0.5, 1)$ $\quad \Pi_1\big|_{(-0.5,1)}$ coincide con la retta che passa per i punti $(-0.5, 1.4)$, $(1.0, 0.2)$ che ha equazione

$$r(x) = 1.4 + (x+0.5)\,\frac{0.2-1.4}{1+0.5}$$

$$r(0) = 1.4 + \frac{1}{2}\,\frac{-1.2}{1.5} = \frac{14}{10} - \frac{12}{30} = \frac{42-12}{30} = 1.$$