COGNOME [   ] NOME [   ] N. Matricola [   ]

Calcolo Numerico [40127] (5 crediti) - 20 giugno 2011

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A;

ii) calcolare la fattorizzazione LU di A;

iii) risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

i) A è non singolare $\det(A) = (-3-2) - 3(6-1) = -20 \neq 0$ quindi la fattorizzazione LU se esiste è unica.
I determinanti delle sottomatrici principali $1 \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 \neq 0$ sono diversi da zero quindi la fattorizzazione LU esiste.

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $m_{21} = 2$, $m_{31} = 1$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & -1-6 & 1 \\ & 2-3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & -7 & 1 \\ & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $m_{32} = 1/7$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & -7 & 1 \\ & & 3-1/7 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ & -7 & 1 \\ & & \frac{20}{7} \end{bmatrix}$$

iii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right]$ pivotazione $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right]$ $m_{21} = 1/2$, $m_{31} = 1/2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ & 3+1/2 & -1/2 & -5-3/2 \\ & 2+1/2 & 3-1/2 & -6-3/2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ & 7/2 & -1/2 & -13/2 \\ & 5/2 & 5/2 & \frac{-15}{2} \end{array}\right] \quad m_{32} = \frac{5}{7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ & 7/2 & -1/2 & -13/2 \\ & & \frac{5}{2}+\frac{5}{14} & \frac{-15}{2}+\frac{65}{14} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ & 7/2 & -1/2 & -13/2 \\ & & \frac{40}{14} & \frac{-40}{14} \end{array}\right]$$

$x_3 = -1$ $\quad x_2 = \frac{2}{7}\left(-\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\right) = -2$ $\quad x_1 = \frac{1}{2}(3-2+1) = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Dato l'integrale

$$I = \int_0^1 (1+x^2)e^{-x^2}\,dx$$

i) stimare il numero di sottointervalli necessari affinche l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-6};

ii) approssimare I usando il metodo del punto medio con 4 sottointervalli.

i) $f(x) = (1+x^2)\,e^{-x^2}$, $\quad f'(x) = 2x\,e^{-x^2} - 2x(1+x^2)\,e^{-x^2} = -2x^3 e^{-x^2}$

$f''(x) = -6x^2 e^{-x^2} + 2x^3\,2x\,e^{-x^2} = 2x^2(2x^2-3)\,e^{-x^2}$

$|f''(x)| = 2x^2(3-2x^2)\,e^{-x^2}$ se $x \in [0,1]$

$g(x) = 2x^2(3-2x^2)\,e^{-x^2}$ $\quad g'(x) = [12x - 16x^3 - 4x^3(3-2x^2)]\,e^{-x^2}$

$= 4x(3-7x^2+2x^4)\,e^{-x^2}$

$g'(x)=0$ se $x=0$ oppure $x^2 = \dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{4} < \begin{matrix} 3 \\ \frac{1}{2} \in [0,1] \end{matrix}$

$g(0)=0$ $\quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2e^{-1/2}$ $\quad g(1) = 2e^{-1}$ $\quad \max\limits_{x\in[0,1]} g(x) = 2e^{-1/2}$

$|I - I_N^T| = \frac{1}{12}\frac{1}{N^2}|f''(\xi)| \le \frac{1}{12}\frac{1}{N^2}\,2\,\frac{1}{\sqrt{e}} < 10^{-6}$ se $\frac{10^6}{6\sqrt{e}} < N^2$

$N > 317.94$ $\quad \boxed{N \geq 318}$

ii)

x	$1/8$	$3/8$	$5/8$	$7/8$
$f(x)$	0.99988	0.99099	0.94094	0.82109

$I_4^{PM} = \frac{1}{4}\left[f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8)\right]$

$= 0.93823$

Esercizio 3

Per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{yt}{1+t^2} & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

i) scrivere il metodo di Taylor di ordine 2;

ii) approssimare $y(0.5)$ usando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.25$.

i) $y'' = y' \frac{t}{1+t^2} + y \frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2} = y \frac{t^2}{(1+t^2)^2} + y \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{y}{(1+t^2)^2}$

$u_0 = 1$

Per $m \geq 0$

$u_{m+1} = u_m + h \frac{u_m t_m}{1+t_m^2} + \frac{h^2}{2} \frac{u_m}{(1+t_m^2)^2}$

ii) $u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}\left(\frac{u_m t_m}{1+t_m^2} + \frac{u_{m+1} t_{m+1}}{1+t_{m+1}^2} \right)$

$\left(1 - \frac{h}{2} \frac{t_{m+1}}{1+t_{m+1}^2}\right) u_{m+1} = \left(1 + \frac{h}{2} \frac{t_m}{1+t_m^2}\right) u_m$

$t_0 = 0 \quad t_1 = \frac{1}{4} \quad t_2 = \frac{1}{2} \qquad u_0 = 1 \qquad h = \frac{1}{4}$

$\left(1 - \frac{1}{8} \frac{1/4}{1+1/16}\right) u_1 = 1 \qquad \left(1 - \frac{1}{8}\frac{4}{17}\right) u_1 = 1 \qquad \left(1 - \frac{1}{34}\right) u_1 = 1$

$u_1 = \frac{34}{33}$

$\left(1 - \frac{1}{8} \frac{1/2}{1+1/4}\right) u_2 = \left(1 + \frac{1}{8} \frac{1/4}{1+1/16}\right) \frac{34}{33} \qquad \left(1 - \frac{1}{8} \frac{2}{5}\right) u_2 = \left(1 + \frac{1}{8}\frac{4}{17}\right) \frac{34}{33}$

$\left(1 - \frac{1}{20}\right) u_2 = \left(1 + \frac{1}{34}\right) \frac{34}{33} \qquad \frac{19}{20} u_2 = \frac{35}{33}$

$u_2 = \frac{35}{33} \frac{20}{19}$

Esercizio 4

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Milne per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Metodo di Milne:

$u_0 = y_0$

u_1, u_2, u_3 calcolati con un metodo ad un passo

Per $n \geq 3$

$$u_{n+1} = u_{n-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 2f(t_{n-2}, u_{n-2})]$$