COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

# Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Seconda prova intermedia

22 dicembre 2010

## Esercizio 1

Dato l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx$$

i) approssimare $I$ usando la formula di Gauss a tre punti;

ii) stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare $I$ con errore minore di $10^{-2}$ usando la formula dei trapezi.

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx \underset{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1+s}{2}}}{\frac{3}{2}+\frac{s}{2}}\,ds = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{1+s}{2}}}{3+s}\,ds$

$F(s) = \dfrac{e^{-\frac{1+s}{2}}}{3+s}$

| $s$ | $-\sqrt{3/5}$ | $0$ | $\sqrt{\frac{3}{5}}$ |
|---|---|---|---|
| $F(s)$ | 0.40146 | 0.20218 | 0.10909 |

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1}\,dx \simeq \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}F(0) + \frac{5}{9}F\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right) = 0.46335$$

ii) $E_N^T = |I - I_N^T| = \dfrac{b-a}{12} H^2 |f''(\xi)|$ dove $H = \dfrac{b-a}{N}$ e $\xi \in [a,b]$

In questo esercizio $a=0$, $b=1$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$

$f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1+x) - e^{-x}}{(1+x)^2} = -\dfrac{(2+x)e^{-x}}{(1+x)^2}$ $\quad f''(x) = -\dfrac{(1-2-x)e^{-x}(1+x)^2 - 2(1+x)(2+x)e^{-x}}{(1+x)^4}$

$f''(x) = -\dfrac{[(-1-x)(1+x) - 2(2+x)]e^{-x}}{(1+x)^3} = \dfrac{x^2+4x+5}{(1+x)^3}e^{-x} > 0$ se $x \in (0,1)$

quindi se $x \in (0,1)$ $|f''(x)| = f''(x)$

$f'''(x) = \dfrac{(2x+4-x^2-4x-5)(1+x)^3 - 3(1+x)^2(x^2+4x+5)}{(1+x)^6}e^{-x} =$

$= \dfrac{(-x^2-2x-1)(1+x) - 3(x^2+4x+5)}{(1+x)^4}e^{-x} < 0$ se $x \in (0,1) \Rightarrow \max\limits_{x\in(0,1)} |f''(x)| = f''(0)$

$E_N^T \le \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{N^2} f''(0) = \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{N^2}\, 5 < 10^{-2}$ se $\sqrt{\dfrac{5}{12}}\,10 < N$ $\quad N > 5\sqrt{\dfrac{5}{3}} = 6.4550$

$\boxed{N \geq 7}$

**Esercizio 2**

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t(y+1) & t \in [0,T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

approssimare $y(0.5)$ usando

i) il metodo di Taylor di ordine 2 con passo $h = 1/4$;

ii) il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 1/4$.

i) $y'' = y+1 + ty' = y+1 + t^2(y+1) = (y+1)(1+t^2)$ $\quad t_0=0 \quad t_1=\frac{1}{4} \quad t_2=\frac{1}{2}$

Taylor ordine 2 $\quad \begin{cases} u_{m+1} = u_m + h\, t_m(u_m+1) + \frac{h^2}{2}(u_m+1)(1+t_m^2) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

$$u_1 = 1 + \frac{1}{4}\, 0\,(1+1) + \frac{1}{32}(1+1)(1+0) = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

$$u_2 = \frac{17}{16} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\left(\frac{17}{16}+1\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{17}{16}+1\right)\left(1+\frac{1}{16}\right) = \frac{17}{16} + \frac{1}{16}\,\frac{33}{16}\left(1+\frac{17}{32}\right)$$

$$= 1.2599 \simeq y(2\cdot h) = y\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

ii) Crank Nicolson $\quad u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}\left[t_m(u_m+1) + t_{m+1}(u_{m+1}+1)\right]$

$$\left(1 - \frac{h}{2}t_{m+1}\right)u_{m+1} = u_m + \frac{h}{2}t_m(u_m+1) + \frac{h}{2}t_{m+1} =$$

$$= \left(1+\frac{h}{2}t_m\right)u_m + \frac{h}{2}(t_m+t_{m+1})$$

$u_0 = 1$

$$\left(1-\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\right)u_1 = \left(1+\frac{1}{8}0\right)1 + \frac{1}{8}\left(0+\frac{1}{4}\right) \qquad u_1 = \frac{1+\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{32}} = \frac{33}{31}$$

$$\left(1-\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\right)u_2 = \left(1+\frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\right)\frac{33}{31} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{15}{16}u_2 = \frac{33}{32}\,\frac{33}{31} + \frac{3}{32} \qquad u_2 = \frac{33\cdot 33}{30\cdot 31} + \frac{1}{10} = 1.2710$$

## Esercizio 3

Dato il seguente metodo a più passi per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy:

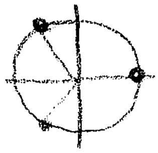
$$u_{i+1} = u_{i-2} + \frac{3h}{8}(f_{i+1} + 3f_i + 3f_{i-1} + f_{i-2}),$$

i) dimostrare che è convergente;

ii) dimsotrare che ha ordine di consistenza 4.

i) È un metodo a 3 passi. Il polinomio caratteristico è $r^3 - 1 = 0$ che ha tre radici diverse tutte 3 di modulo 1

$r_1 = 1 \quad r_2 = e^{\frac{2\pi}{3} i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad r_3 = e^{\frac{4\pi}{3} i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$



Quindi la condizione delle radici è verificata il metodo è zero stabile

È consistente perchè

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_i+h) - y(t_i-2h) - \frac{3h}{8}\left(y'(t_i+h) + 3y'(t_i) + 3y'(t_i-h) + y'(t_i-2h)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{y(t_i)} + hy'(t_i) - (\cancel{y(t_i)} - 2hy'(t_i)) - \frac{3h}{8}\left(y'(t_i) + 3y'(t_i) + 3y'(t_i) + y'(t_i)\right)\right] + O(h)$$

$$= y'(t_i)\left(1 + 2 - \frac{3}{8}8\right) + O(h) = O(h) \quad \text{quindi} \quad \tau(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ii) Ricordiamo che

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{8}\left[g(a) + 3g\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3g\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + g(b)\right] - \frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 g^{IV}(\xi)$$

$$y(t_i+h) - y(t_i-2h) = \int_{t_i-2h}^{t_i+h} y'(s)\,ds$$

$$= \frac{3h}{8}\left[y'(t_i-2h) + 3y'(t_i-h) + 3y'(t_i) + y'(t_i+h)\right] - \frac{3}{80}\left(\frac{3h}{3}\right)^5 y^{V}(\xi_i)$$

Quindi $\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{h}\left[y(t_i+h) - y(t_i-2h) - \frac{3h}{8}\left(y'(t_i+h) + 3y'(t_i) + 3y'(t_i-h) + y'(t_i-2h)\right)\right] =$

$$= -\frac{3}{80} h^4 y^{V}(\xi_i)$$

$$\tau(h) = \max_i |\tau_i(h)| = O(h^4)$$