COGNOME ____ NOME ____ N. Matricola ____

Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Prima prova intermedia - A

4 novembre 2010

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione di Cholesky di A;

ii) calcolare la fattorizzazione di Cholesky di A;

iii) usando la fattorizzazione di Cholesky di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i) studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel;

ii) scrivere il metodo di Gauss-Seidel

iii) partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 3

Data l'equazione non lineare

$$\frac{x^3 - x - 7}{x^2 + 1} = 2x - 1$$

i) dimostrare che ha una unica soluzione α e che $\alpha \in (-2, -1)$;

ii) usando il metodo di bisezione approssimare α con errore minore di 0.25;

iii) approssimare α con errore stimato minore di 10^{-2};

iv) studiare la convergenza ad α del seguente metodo di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = \frac{-1}{3}\left[(x^{(k)})^3 - (x^{(k)})^2 + 6\right] .$$

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-1.0	-0.5	1.0	2.0
y_i	2.0	1.4	0.2	-0.2

calcolare

i) il polinomio interpolatore di Lagrange;

ii) il valore della funzione di interpolazione composita lineare a tratti nel punto $x = 0$.

COGNOME [ ] NOME [ ] N. Matricola [ ]

Calcolo Numerico (Ing. Civile) - Prima prova intermedia - B

4 novembre 2010

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione di Cholesky di A;

ii) calcolare la fattorizzazione di Cholesky di A;

iii) usando la fattorizzazione di Cholesky di A risolvere il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i) studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel;

ii) scrivere il metodo di Gauss-Seidel;

iii) partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel.

Esercizio 3

Data l'equazione non lineare

$$\frac{x^3+3x^2-3}{2(x^2+1)} = x+1$$

i) dimostrare che ha una unica soluzione α e che $\alpha \in (-2,-1)$;

ii) usando il metodo di bisezione approssimare α con errore minore di 0.25;

iii) approssimare α con errore stimato minore di 10^{-2};

iv) studiare la convergenza ad α del seguente metodo di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = \frac{-1}{2}\left[(x^{(k)})^3 - (x^{(k)})^2 + 5\right] .$$

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	-1.0	0.5	1.0	2.0
y_i	2.2	0.8	0.6	0.2

calcolare

i) il polinomio interpolatore di Lagrange;

iii) il valore della funzione di interpolazione composita lineare a tratti nel punto $x = 0$.