COGNOME ______________ NOME ______________ N. Matricola ______________

Calcolo Numerico [140060] Ing. Civile - Primo appello a.a. 2011–2012

11 gennaio 2012

Esercizio 1

i) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

ii) Calcolare la fattorizzazione LU della matrice del sistema lineare della parte i).

i) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 & 7 \end{array}\right]$ Scambio 1^a e 2^a riga $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 7 \end{array}\right]$ $m_{21} = 1/2$ $m_{31} = -1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 1+3/2 & 0-\frac{2}{2} & 5-\frac{2}{2} \\ & 6+(-3) & 1+2 & 7+2 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 5/2 & -1 & 4 \\ & 3 & 3 & 9 \end{array}\right]$ Scambio 2^a e 3^a riga $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 9 \\ & 5/2 & -1 & 4 \end{array}\right]$ $m_{32} = \frac{5}{6}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 9 \\ & & -1-5/2 & 4-\frac{15}{2} \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 9 \\ & & -7/2 & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$ $x_3 = 1$ $x_2 = \frac{1}{3}(9-3x_3) = \frac{6}{3} = 2$ $x_1 = \frac{1}{2}(2+3x_2-2x_3) = \frac{1}{2}(2+6-2) = 3$

$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si scambiano righe in modo di avere l'elemento pivotale di modulo massimo.

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ $m_{21} = 2$ $m_{31} = -2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & -3-2 & 2 \\ & 6+2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & -5 & 2 \\ & 8 & 1 \end{bmatrix}$ $m_{32} = -\frac{8}{5}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & -5 & 2 \\ & & 1+\frac{16}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & -5 & 2 \\ & & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -2 & -8/5 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 2

i) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

studiare la convergenza dei metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Sidel.

ii) Si consideri il seguente metodo iterativo per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato}$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tfrac{2}{3}D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})$$

dove D è la matrice diagonale con la stessa diagonale della matrice A.

Per la matrice A data nella parte i) scrivere la matrice d'iterazione di questo metodo.

i) La matrice A è simmetrica ($A^T = A$). Verifichiamo che è definita positiva: $3 > 0$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5 > 0$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6-2-1 = 3 > 0$

Quindi Gauss-Seidel converge.

Per studiare la convergenza di Jacobi calcoliamo il raggio spettrale della matrice d'iterazione $B_J = D^{-1}(D-A) = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{6} = \lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right) = 0 \iff \lambda = \begin{matrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{matrix} \quad \rho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

quindi Jacobi converge.

ii) $x^{(k+1)} = \left(I - \frac{2}{3}D^{-1}A\right)x^{(k)} + \frac{2}{3}D^{-1}b$

$$B = I - \frac{2}{3}D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 & -2/9 \\ -1/3 & \frac{2}{3} & 0 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/9 & \frac{2}{9} \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Data l'equazione

$$1 - \frac{1}{1+x^2} = 3 - 2x \tag{1}$$

i) usando il metodo di Newton approssimare la soluzione con errore stimato minore di 10^{-2};

ii) dimostrare che l'iterazione di punto fisso

$$\begin{aligned} & x^{(0)} \text{ assegnato} \\ & x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{1+[x^{(k)}]^2}\right) \quad \text{per } k \geq 0 \end{aligned}$$

converge alla soluzione di (1) (se si parte sufficientemente vicini).

i) $1 - \frac{1}{1+x^2} = 3 - 2x \iff 1 + x^2 - 1 = (3-2x)(1+x^2) \iff x^2 = 3 + 3x^2 - 2x - 2x^3$

$2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x^3 - x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$

$f(x) = x^3 - x^2 + x - \frac{3}{2}$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ perché le radici sono complesse $\frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$. Quindi l'equazione $f(x) = 0$ ha una unica soluzione. Siccome $f(1) = 1 - 1 + 1 - 3/2 = -1/2 < 0$ e $f(2) = 8 - 4 + 2 - 3/2 > 0$ ed f è continua la soluzione appartiene all'intervallo $(1,2)$

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$inc = \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$
0	$3/2$	1.125	4,75	0.236842
1	1,263158	0.183044	3.260388	0.056142
2	1,207016	0.008615	2.956631	0.002914

STOP perché $|inc| < 10^{-2}$

$\alpha \simeq 1.207016$

ii) $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{1+x^2}\right)$ $\quad \phi'(x) = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{(1+x^2)^2}$

Se $x \in (1,2)$ $\quad |\phi'(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^2} < \frac{2}{4} < 1$

Se α è la soluzione $\alpha \in (1,2)$ e $|\phi'(\alpha)| < 1$ quindi l'iterazione di punto fisso converge.

Esercizio 4

Per i dati nella tabella

x	-2	-1	0	1	3
y	5.2	4.1	2.9	1.2	-0.9

calcolare:

i) la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati;

ii) il polinomio interpolatore di Lagrange.

i) $\sum_{i=0}^{4} x_i = 1 \quad \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 15 \quad \sum_{i=0}^{4} y_i = 12.5 \quad \sum_{i=0}^{4} x_i y_i = -16$

$r(x) = a_0 + a_1 x$ con a_0, a_1 soluzione del sistema lineare.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad a_1 = 12.5 - 5a_0$$

$$a_0 + 15(12.5 - 5a_0) = -16$$

$(1-75)a_0 = -16 - 187.5 \qquad a_0 = \frac{203.5}{74} = 2.75 \qquad a_1 = 12.5 - 13.75 = -1.25$

$r(x) = 2.75 - 1.25x$

ii)

-2	5.2					
-1	4.1	$\frac{4.1-5.2}{-1+2} = -1.1$				
0	2.9	$\frac{2.9-4.1}{0+1} = -1.2$	$\frac{-1.2+1.1}{0+2} = -0.05$			
1	1.2	$\frac{1.2-2.9}{1-0} = -1.7$	$\frac{-1.7+1.2}{1+1} = -0.25$	$\frac{-0.25+0.05}{1+2} = \frac{-0.2}{3}$		
3	-0.9	$\frac{-0.9-1.2}{3-1} = -1.05$	$\frac{-1.05+1.7}{3-0} = \frac{0.65}{3}$	$\frac{\frac{0.65}{3}+0.25}{3+1} = \frac{1.4}{12}$	$\frac{\frac{1.4}{12}+\frac{0.2}{3}}{3+2} = \frac{2.2}{60}$	

$$P_4(x) = 5.2 - 1.1(x+2) - 0.05(x+2)(x+1) - \frac{0.2}{3}(x+2)(x+1)x + \frac{1.1}{30}(x+2)(x+1)x(x-1)$$

Esercizio 5

i) Stimare il numero di sottointervalli necessari per approssimare

$$I = \int_0^1 x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, dx$$

con errore minore di 10^{-2} usando il metodo dei trapezi.

ii) Approssimare I usando il metodo dei trapezi con 6 sottointervalli e dare una stima a posteriori dell'errore.

i) $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$$f''(x) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) =$$

$$= -\pi\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$|f''(x)| \le \pi\left|\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 |x|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \underset{x\in[0,1]}{\le} \pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$E_N^T = |I - I_N^T| = \left|\frac{b-a}{12}H^2 f''(\xi)\right| \quad \text{con } H = \frac{b-a}{N} \text{ e } \xi \in (a,b).$$

$$E_N^T \le \frac{1}{12}\frac{1}{N^2}\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] < 10^{-2} \iff N > 10\sqrt{\frac{1}{12}\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]} = 6.837$$

$$\boxed{N \ge 7}$$

ii)

x	0	$1/6$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
$f(x)$	0	0.160988	0.288675	0.353534	$1/3$	0.215683	0

$$I_6^T = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right] = 0.225372$$

$$I_3^T = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right] = 0.207336$$

$$E_6^T \simeq \frac{|I_6^T - I_3^T|}{2^2 - 1} = 0.006012$$

Esercizio 6

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Taylor di ordine 2 per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2+1}{y+1} & t \in [0,1] \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$