COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Calcolo Numerico [140060] Ing. Civile - Quarto appello a.a. 2012–2013

16 luglio 2013

Esercizio 1

i) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss con pivotazione parziale per righe.

ii) Calcolare la fatorizzazione LU della matrice del sistema lineare precedente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente metodo iterarivo per l'approssimazione della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(0)} \text{ assegnato} \\ &\text{per } k \geq 0 \\ &\qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tfrac{1}{4} D^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned}$$

essendo D la matrice diagonale con la stessa diagonale della matrice A.
Per il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i) scrivere la matrice d'iterazione del metodo;

ii) studiare la convergenza del metodo iterativo.

Esercizio 3

Date le funzioni $f_1(x) = 2e^x$ e $f_2(x) = 1 - x^3$

i) dimostrare che i loro grafici se intersecano in un unico punto.

ii) Sia α la ascissa del punto di intersezione; approssimare α con errore stimato minore di 10^{-3}.

Esercizio 4

Approssimare $\int_1^2 xe^{-2x}\,dx$ con errore minore di 10^{-3}. Indicare il metodo usato e il numero di sottointervalli necessari per avere la precisione richiesta.

Esercizio 5

Approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{1+2y(t)} & t \in [1,2] \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

usando il metodo di Taylor di ordine 2 con passo $h = 1/2$.

Esercizio 6

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo di Runge Kutta l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy della forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \, . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_i, u_i) \\ K_2 &= f(t_i + \tfrac{h}{2}, u_i + \tfrac{h}{2} K_1) \\ K_3 &= f(t_i + h, u_i - hK_1 + 2hK_2) \\ u_{i+1} &= u_i + \tfrac{1}{6}(K_1 + 4\, K_2 + K_3) \end{aligned}$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$.