Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Adams-Bashforth a quattro passi

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) & i = 3, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

  per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

  dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$ e $f_i = f(t_i, u_i)$
- Per calcolare u_1, u_2 e u_3 usare
  - il metodo di eulero;
  - il metodo di Runge-Kutta di ordine 4.

  Verificare l'ordine di convergenza del metodo in entrambi casi.

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo predictor corrector

$$\begin{cases} \quad u^*_{i+1} = u_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) \\ \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}(9f^*_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, N-1$$

per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$, $f_i = f(t_i, u_i)$ e $f^*_{i+1} = f(t_{i+1}, u^*_{i+1})$.

  - Usare il metodo di Runge-Kutta di ordine 4 per calcolare u_1 e u_2.
  - Verificare l'ordine di convergenza del metodo

- Modificare il metodo calcolando u^*_{i+1} nel seguente modo

$$u^*_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

e verificare di nuovo l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizio

Usando il metodo di Eulero approssimare la soluzione di

- $$\begin{cases} y_1'(t) = -4y_1(t) - 2y_2(t) + \cos t + 4\sin t \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + y_2(t) - 3\sin t \\ y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = -1 \end{cases} \qquad t \in [0, 2]$$

  Soluzione esatta: $$\begin{array}{l} y_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t \\ y_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t} \end{array}$$

- $$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{2t}\sin t \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = -0.4 \quad y'(0) = -0.6 \end{cases}$$

  Soluzione esatta: $y(t) = 0.2\, e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$.

Chiamando $y_1(t) = y(t)$ e $y_2(t) = y'(t)$

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + 2y_2(t) + e^{2t} \sin t \\ y_1(0) = -0.4 \quad y_2(0) = -0.6 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$