Risoluzione di equazioni non lineari

Il comando `fzero`

- `x=fzero(fun,x0)` *"tries to find a zero of fun near x0"*.
- `x0` può essere un scalare o un vettore di due componenti.
- Se `x0` e un vettore di due componenti `fzero` assume che `x0` è un intervallo e che il segno di `fun(x0(1))` e diverso del segno di `fun(x0(2))`. Se non è cosi da errore.
- L'algoritmo che usa è una combinazione del metodo di bisezione, il metodo delle secanti e tecniche di interpolazione.
- `fun` è un *"function handle"*.

Esempio

Per trovare una soluzione vicina ad 1 dell'equazione $x^2 - 2 = 0$

```
>> fzero(@(x) x.^2-2,1)
ans =
    1.4142
```

oppure in un M-file scrivo la funzione $f(x) = x^2 - 2$

```
function y=esempio(x)
y=x.^2-2;
```

e nella riga di comandi

```
>> fzero(@esempio,1)
ans =
    1.4142
```

Il metodo di Newton

La seguente funzione implementa il metodo di Newton

```
function [x,nit,flag]=newton(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
flag=1;
for nit=1:nmax
    inc=fun(x)/dfun(x);
    x=x-inc;
    if abs(inc)<toll, flag=0; return, end
end
```

Esercizio

Usando la funzione Newton risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0\,.$$

Che cosa si osserva sulla velocità di convergenza?

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo - I

La successione $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ converge ad α con ordine p se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = C$$

e $0 < C < +\infty$.

Come stimare numericamente l'ordine di convergenza di una successione convergente?

- Nella pratica abbiamo solo un numero finito di elementi della successione quindi **un vettore**

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{L-1}, x_L]$$

- e identificaremo α con l'ultima componente di questo vettore

$$\alpha \approx x_L$$

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo - II

- Per k sufficientemente grande risulta essere

$$|x_{k+1} - x_L| \approx C|x_k - x_L|^p$$

  e anche

$$|x_{k+2} - x_L| \approx C|x_{k+1} - x_L|^p \, .$$

  (Quindi $k \leq L - 3$.)
- Faccendo il rapporto

$$\frac{|x_{k+2} - x_L|}{|x_{k+1} - x_L|} \approx \left(\frac{|x_{k+1} - x_L|}{|x_k - x_L|} \right)^p$$

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo - III

- Chiamando $R_k = \frac{|x_{k+1} - x_L|}{|x_k - x_L|}$ abbiamo

$$R_{k+1} \approx R_k^p$$

- Calcolando il logaritmo

$$\log R_{k+1} \approx p \log R_k \, .$$

- Quindi

$$p \approx \frac{\log R_{k+1}}{\log R_k}$$

Esercizio

- La seguente funzione stima l'ordine di convergenza di una successione convergente:

```
function p=ordine(v)
err=abs(v(1:end-1)-v(end));
R=err(2:end)./err(1:end-1);
p=log(R(2:end))./log(R(1:end-1));
```

- Confrontare l'ordine di convergenza del metodo di Newton nel risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \qquad \text{e} \qquad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0\,.$$

Ordine di convergenza del metodo di Newton

La seguente funzione implementa il metodo di Newton e restituisce anche il vettore dell'iterate.

```
function [x,nit,xv,flag]=newton(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
flag=1;
xv=[x];
for nit=1:nmax
    inc=fun(x)/dfun(x);
    x=x-inc;
    xv=[xv x];
    if abs(inc)<toll, flag=0; return, end
end
```