

Formule di quadratura composite

- ▶ Formula del punto medio con N sottointervalli:

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

- ▶ Formula del trapezio con N sottointervalli:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{H}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right].$$

- ▶ Formula di Cavalieri-Simpson con N sottointervalli:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{H}{6} \sum_{i=1}^N \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right].$$

$$H = (b - a)/N, \quad x_i = a + iH, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Esercizio

Scrivere tre funzioni di Matlab che approssimino

$$\int_a^b f(x) dx$$

usando le formule composite con N sottointervalli

- ▶ del punto medio,
- ▶ dei trapezi,
- ▶ di Simpson,

rispettivamente.

Il comando quad

```
>> Q = quad(FUN,A,B)
```

“Tries to approximate the integral of scalar-valued function FUN from A to B to within an error of 1.e-6 using recursive adaptive Simpson quadrature. FUN is a function handle. The function Y=FUN(X) should accept a vector argument X and return a vector result Y, the integrand evaluated at each element of X.”

Stima a posteriori dell'errore - I

Errore con passo H

$$I(f) - I_H^S = -\frac{b-a}{180} \frac{H^4}{2^4} f^{(iv)}(\zeta)$$

Errore con passo $H/2$

$$I(f) - I_{H/2}^S = -\frac{b-a}{180} \frac{(H/2)^4}{2^4} f^{(iv)}(\hat{\zeta})$$

Quindi

$$I(f) - I_H^S \approx 2^4 \left[I(f) - I_{H/2}^S \right]$$

if $f^{(iv)}(\zeta) \approx f^{(iv)}(\hat{\zeta})$.

Stima a posteriori dell'errore - II

Stima dell'errore usando $|I_{H/2}^S - I_H^S|$:

$$I(f) - I_H^S = I(f) - I_{H/2}^S + I_{H/2}^S - I_H^S.$$

$$2^4 \left[I(f) - I_{H/2}^S \right] \approx I(f) - I_{H/2}^S + I_{H/2}^S - I_H^S.$$

$$(2^4 - 1) \left[I(f) - I_{H/2}^S \right] \approx I_{H/2}^S - I_H^S$$

$$|I(f) - I_{H/2}^S| \approx \frac{1}{2^4 - 1} |I_{H/2}^S - I_H^S|.$$

Esercizio

- ▶ Scrivere una funzione di Matlab per approssimare

$$\int_a^b f(x) dx$$

con errore stimato minore di `tol1` usando la formula di Simpson.

Esercizio

- ▶ Scrivere una funzione di Matlab che implementi la formula di Gauss a due punti composta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{H}{2} \sum_{i=1}^N \left[f \left(m_i - \frac{H}{2\sqrt{3}} \right) + f \left(m_i + \frac{H}{2\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$H = (b - a)/N, \quad x_i = a + iH, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$m_i = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad i = 1, \dots, N.$$