

I polinomi in Matlab

- ▶ Un polinomio di grado n in Matlab si rappresenta mediante un vettore di $n+1$ componenti che contiene i coefficienti del polinomio ordinati da quello di grado n a quello di grado 0.

$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$$

```
>> p=[3 -2 0 1 -5]
```

- ▶ Per calcolare il valore di p in uno o più punti si usa il comando `polyval`

```
>> z=[0 1 2];
```

```
>> polyval(p,z)
```

Calcola $p(0)$, $p(1)$ e $p(2)$.

- ▶ Il comando `roots` calcola le n radici di un polinomio di grado n .

```
>> roots(p)
```

Derivata e primitiva di un polinomio

- ▶ Il comando `polyder` calcola la derivata di un polinomio.

```
>> dp=polyder(p)
```

Il risultato è un nuovo polinomio.

- ▶ Il comando `polyint` calcola la primitiva di un polinomio che in zero vale zero.

```
>> q=polyint(p)
```

Il risultato è un nuovo polinomio con termine di grado zero uguale a zero.

Il comando `polyfit`

- ▶ Dati due vettori x e y di uguale lunghezza ($m + 1$ componenti entrambi) il comando

```
>> polyfit(x,y,n)
```

calcola il polinomio di grado n di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati dei dati (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, m$.

- ▶ I dati sono $m + 1$ punti del piano. I valori in x sono le ascisse e i valori in y le ordinate.

Esercizio

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ definita nell'intervallo $I = [-5, 5]$. Scrivere uno script di Matlab per disegnare il grafico di

- ▶ la funzione f ,
- ▶ il polinomio interpolatore di f in $N + 1$ punti equispaziati di I ,
- ▶ il polinomio interpolatore di f negli $N + 1$ punti di Chebyshev di I .

Nodi di Chebyshev

- ▶ nell'intervallo $[-1, 1]$

$$\hat{x}_i = -\cos(i\pi/N) \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

- ▶ nell'intervallo $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \hat{x}_i.$$

Funzioni *spline*

Dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$ con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ si dice funzione spline cubica interpolatoria, S le funzioni tali che

- ▶ S è continua, derivabile con derivata continua e ha anche seconda derivata continua,
- ▶ $S|_{[x_{i-1}, x_i]}$ è un polinomio di grado 3,
- ▶ $S(x_i) = y_i$ per $i = 0, \dots, N$.

Funzioni *spline*

- ▶ Una funzione spline cubica interpolatoria dipende da $4N$ parametri.
- ▶ Deve soddisfare $3(N - 1) + (N + 1)$ condizione.
- ▶ I due parametri liberi si possono fissare in modi diversi:
 - Spline naturale $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$.
 - Spline periodica $S'(x_0) = S'(x_N)$ e $S''(x_0) = S''(x_N)$.
 - Spline 'not-a-knot' $S'''(x)$ continua in x_1 e x_{N-1} .

Il comando

```
>> yy=spline(x,y,xx)
```

calcola il valore in xx della spline cubica 'not-a-knot' che interpola i dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^N$.

Esercizio

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	0.5	1.6	2.9	3.4	4.8	5.2	5.7	6.0
y_i	2.20	2.13	3.32	5.21	5.10	7.05	7.00	8.00	8.25

disegnare il grafico della retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, del polinomio interpolatore e della spline cubica interpolatoria 'not-a-knot'.

Errore di interpolazione

Se $y_i = f(x_i)$ per una funzione f sufficientemente regolare e S è la spline cubica interpolatoria naturale allora

$$\max_{x \in [x_0, x_N]} |f^{(r)}(x) - S^{(r)}(x)| \leq C_r H^{4-r} \max_{x \in [x_0, x_N]} |f^{(4)}(x)|$$

$r = 0, 1, 2$ e anche $r = 3$.

$H = \max_{j=1, \dots, N} (x_j - x_{j-1})$.

C_r sono costanti che non dipendono da H .

Esercizio

Scrivere una funzione di Matlab che data una funzione f un intervallo $[a, b]$ e un numero naturale N calcoli:

- ▶ Il polinomio P_N che interpola f nei $N + 1$ nodi di Chebyshev dell'intervallo $[a, b]$;
- ▶ l'integrale fra a e b di P_N .