

Risoluzione di equazioni non lineari

Il comando `fzero`

- ▶ `x=fzero(fun,x0)` *“tries to find a zero of fun near x0”*.
- ▶ `x0` può essere un scalare o un vettore di due componenti.
- ▶ Se `x0` è un vettore di due componenti `fzero` assume che `x0` è un intervallo e che il segno di `fun(x0(1))` è diverso del segno di `fun(x0(2))`. Se non è così da errore.
- ▶ L'algoritmo che usa è una combinazione del metodo di bisezione, il metodo delle secanti e tecniche di interpolazione.
- ▶ `fun` è una funzione scritta in Matlab. Più precisamente è un *“function handle”*.

Esempio

Per trovare una soluzione vicina ad 1 dell'equazione $x^2 - 2 = 0$

```
>> fzero(@(x) x.^2-2,1)
```

```
ans =
```

```
1.4142
```

oppure in un M-file scrivo la funzione $f(x) = x^2 - 2$

```
function y=eempio(x)
```

```
y=x.^2-2;
```

e nella riga di comandi

```
>> fzero(@eempio,1)
```

```
ans =
```

```
1.4142
```

Il metodo di Newton

La seguente funzione implementa il metodo di Newton

```
function [x,nit,xv,flag]=newton(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
flag=1;
xv=[x];
for nit=1:nmax
    inc=feval(fun,x)/feval(dfun,x);
    x=x-inc;
    xv=[xv x];
    if abs(inc)<toll, flag=0; return, end
end
```

“Function handle”

Per risolvere l'equazione $\alpha - e^{-\alpha} = 0$ dobbiamo scrivere la funzione $f(x) = x - e^{-x}$

```
function y=es(x)
y=x-exp(-x);
```

e la sua derivata $f'(x) = 1 + e^{-x}$

```
function y=des(x)
y=1+exp(-x);
```

e usare il programma `newton` in questo modo

```
>> [x,n]=newton(@es,@des,1)
```

Esercizio

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo delle secanti

$x^{(-1)}, x^{(0)}$ assegnati

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}) \quad \text{per } k \geq 0.$$

Fermare le iterazioni quando $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < 1.e - 10$.

Esercizio

Usando la funzione newton risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0.$$

Che cosa si osserva sulla velocità di convergenza?

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo

La successione $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ converge ad α con ordine p se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = K$$

e $K > 0$. Quindi per k sufficientemente grande risulta essere

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \approx K|x^{(k)} - \alpha|^p$$

ma anche

$$|x^{(k+2)} - \alpha| \approx K|x^{(k+1)} - \alpha|^p.$$

Abbiamo per tanto

$$\frac{|x^{(k+2)} - \alpha|}{|x^{(k+1)} - \alpha|} \approx \left(\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} \right)^p$$

Chiamando $R_k = \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|}$ risulta

$$\log R_{k+1} \approx p \log R_k \quad \text{quindi} \quad p \approx \frac{\log R_{k+1}}{\log R_k}.$$

Esercizio

- ▶ Scrivere una funzione di matlab per stimare l'ordine di convergenza di una successione convergente.

```
function p=ordine(v)
err=abs(v-v(end));
R=err(2:end)./err(1:end-1);
p=log(R(2:end-1))./log(R(1:end-2));
```

- ▶ Confrontare l'ordine di convergenza del metodo di Newton nel risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0.$$