Approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy

Data una funzione

$$f : [t_I, t_F] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e un numero reale $y_I \in \mathbb{R}$ si cerca la funzione

$$y : [t_I, t_F] \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\begin{aligned} & y'(t) = f(t, y(t)) \quad t_I \leq t \leq t_F \\ & y(t_I) = y_I \, . \end{aligned}$$

I metodi numerici per la approssimazione di y

- Non forniscono una funzione definita in tutti i punti dell'intervallo $[t_I, t_F]$.
- Forniscono un valore approssimato de y in diversi punti dell'intervalo. Questi punti si dicono *nodi*.
- La soluzione approssimata negli altri punti di $[t_I, t_F]$ si ottiene interpolando.

I nodi si possono prendere distribuiti uniformemente in $[t_I, t_F]$ scegliendo un numero naturale N, definendo $h = (t_F - t_I)/N$ e considerando i nodi

$$t_n = t_I + n\,h \qquad 0 \le n \le N\,.$$

Metodo di Eulero

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)) \quad t_I \le t \le t_F \\
y(t_I) &= y_I \,.
\end{aligned}
$$

Sia $N \in \mathbb{N}$ e $h = \frac{t_F - t_I}{N}$. Chiamiamo $t_n = t_I + n\,h$ per $0 \le n \le N$.

$u_0 = y_I$
per $n = 0, \ldots, N-1$
  $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)\,.$

$$u_n \approx y(t_n)$$

Esercizio

Escrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Eulero per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy.

Metodi basati su Taylor

Dato il problema di Cauchy

$$y' = -y + t + 1 \quad t \in [0, 1]$$
$$y(0) = 1\,.$$

(che ha soluzione $y(t) = t + e^{-t}$)

- approssimare la soluzione usando il metodo di Eulero con passo $h = 0.1$ e passo $h = 0.05$;
- confrontare l'errore con passo $h = 0.1$ e con passo $h = 0.05$;
- ripetere usando il metodo di Taylor di ordine 2 e di ordine 4.

Il metodo di Eulero per sistemi di equazioni

Usando il metodo di Eulero approssimare la soluzione di

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \cos t + 4\sin t \\ y_2' = 3y_1 + y_2 - 3\sin t \\ y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = -1\,. \end{cases} \qquad t \in [0,2]$$

Soluzione esatta: $\begin{array}{l} y_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t \\ y_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t} \end{array}$.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin t \qquad t \in [0,1] \\ y(0) = -0.4 \quad y'(0) = -0.6 \end{cases}$$

Soluzione esatta: $y(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$.

Metodi di Runge-Kutta

- Metodo di Heun (ordine 2)

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_I \\
& \text{per } n = 0, \ldots, N-1 \\
& \quad k_1 = f(t_n, u_n) \\
& \quad k_2 = f(t_n + h, u_n + hk_1) \\
& \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

- Metodo di Runge-Kutta di ordine 4 (RK4)

$$
\begin{aligned}
& u_0 = y_I \\
& \text{per } n = 0, \ldots, N-1 \\
& \quad k_1 = f(t_n, u_n) \\
& \quad k_2 = f(t_n + \tfrac{h}{2}, u_n + \tfrac{h}{2}k_1) \\
& \quad k_3 = f(t_n + \tfrac{h}{2}, u_n + \tfrac{h}{2}k_2) \\
& \quad k_4 = f(t_n + h, u_n + hk_3) \\
& \quad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
$$

Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo di Heun per lpprossimazione della soluzione di un problem adi Cauchy.
- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo RK4.
- Verificare numericamente l'ordine di convergenza di questi due metodi.