# Esercizio

Scrivere uno script di Matlab che

- approssimi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -t^2 y & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  usando il metodo di Taylor di secondo ordine;
- verifichi esperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo;
- faccia il grafico della soluzione approssimata e della soluzione esatta $y(t) = \exp(-t^3/3)$.

Ripetere l'esercizio usando il metodo di Crank-Nicolson.

# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Heun:

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \quad K_1 = f(t_i, u_i)\,, \quad K_2 = f(t_i + h, u_i + hK_1) \\ \quad u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

dove $h = T/n$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \ldots, n$.

# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Runge Kutta di ordine 4:

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ \text{for } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \quad K_1 = f(t_i, u_i)\,, \;\; K_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} K_1) \\ \quad K_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} K_2)\,, \;\; K_4 = f(t_i + h, u_i + hK_3) \\ \quad u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2H_3 + K_4) \end{cases}$$

dove $h = T/n$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \ldots, n$.

# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Adams-Bashforth a quattro passi:

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) & i = 3, \dots, n-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

dove $h = T/n$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, \dots, n$.

# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab che implementi il seguente metodo predictor corrector

$$\begin{cases} \quad u_{i+1}^{*} = u_i + \frac{h}{12}(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}) \\ \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{24}(9 f_{i+1}^{*} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \qquad i = 2, \ldots, N-1$$

per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $h = T/N$, $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$, $f_i = f(t_i, u_i)$ e $f_{i+1}^{*} = f(t_{i+1}, u_{i+1}^{*})$.
- Verificare l'ordine di convergenza del metodo

- Modificare il metodo calcolando $u_{i+1}^*$ nel seguente modo

$$u_{i+1}^* = u_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$$

  e verificare di nuovo l'ordine di convergenza del metodo. (Usare il metodo di Runge-Kutta di ordine 4 per calcolare $u_1$ e $u_2$.)
- Esempio

$$\begin{cases} y' = \frac{t^2+1}{y+1} & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  Soluzione: $y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t^3 + 2t + 4} - 1.$